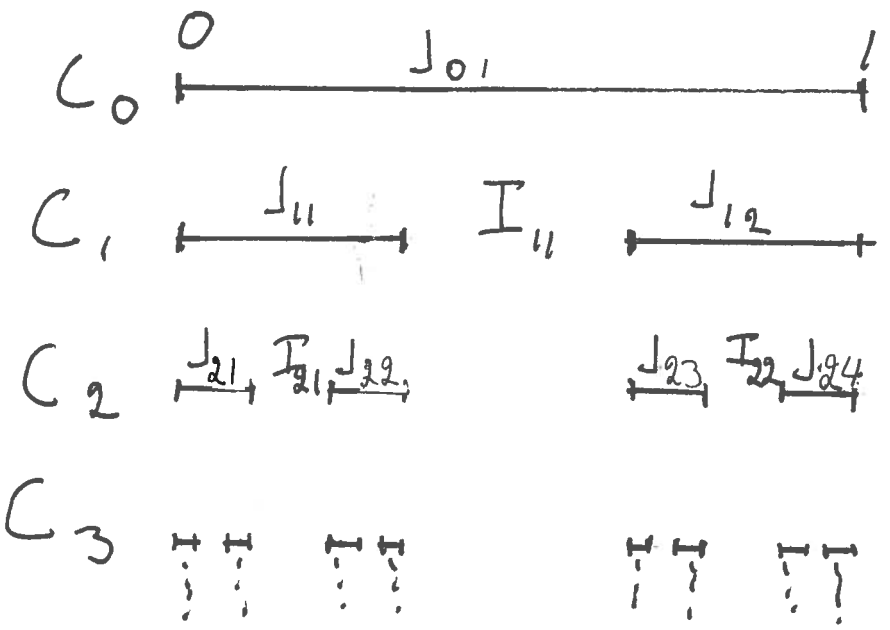
$$= \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i - 2\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i). \quad \square$$

tod. alku

(*) ks. huomautukset seuraavalta sivulta.

Monisto 9.3

Esimerkki Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko



$[0,1]$

$[0,1] \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$
$= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$[0,1] \setminus]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$
$= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$

$\vdots$

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \text{Cantorin } \tfrac{1}{3}\text{-joukko}$$

$$m^*(C_k) = \sum_{i=1}^{2^k} \left(\tfrac{1}{3}\right)^k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^k.$$

äärellinen määrä erillisiä välejä.

Valitaan $\varepsilon > 0$, ja k s.e

$$m^*(C_k) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^k < \varepsilon.$$

$$m^*(C) \underset{C \subset C_k}{\leq} m^*(C_k) < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad m^*(C) = 0.$

<u>Lause</u> Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolla on seuraavat ominaisuudet

(i) $C \neq \emptyset$

(ii) C on kompakti

(iii) C:ssä ei ole eristettyjä pisteitä (jokainen piste on kasautumispiste)

(iv) C:ssä ei ole sisäpisteitä

(v) C ylinumeroituva

<u>Todistus</u> (i) Selvästi välien päätepisteet kuuluvat C:n, esim

$$0 \in C.$$

(ii)
$$C = [0,1] \setminus \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} \underbrace{I_{kj}}_{\text{avoin}}}_{\text{avoin}}$$

$\Rightarrow$ C suljetta (ja rajoitettu)

$\Rightarrow$ kompakti.

(iii) Osoitetaan että jos $x_0 \in C$

$\forall \delta > 0 \ \exists \ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap C, \ x \neq x_0$.

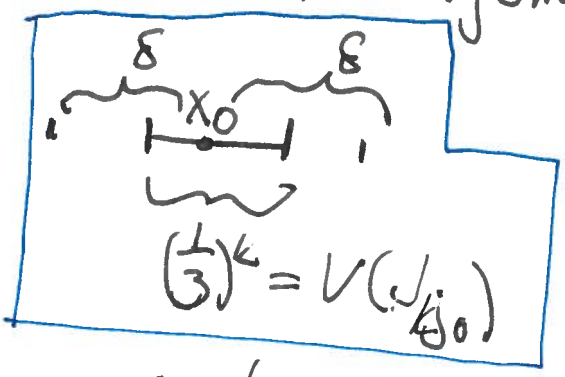
Valitaan k tarpeeksi suuri s.e.

$\left(\frac{1}{3}\right)^k < \delta$.

$x_0 \in C_k$ ja siis johonkin

$\left(\frac{1}{3}\right)^k$ mittaiseen suljettuun jälkeen

J_{kj_0}



$\Rightarrow$ J_{kj_0}:n päätepisteet $\in C \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

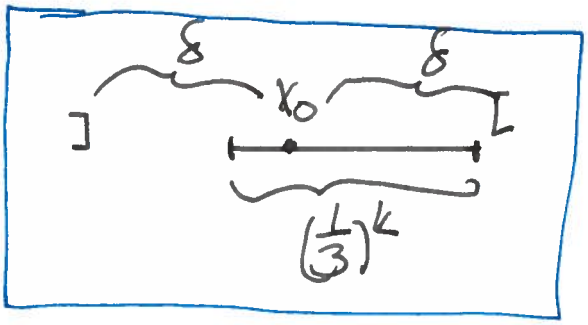
(vastaoletus)

(iv) VO: $\exists\, x_0 \in C$ ja $\delta > 0$ s.e. (siten että)

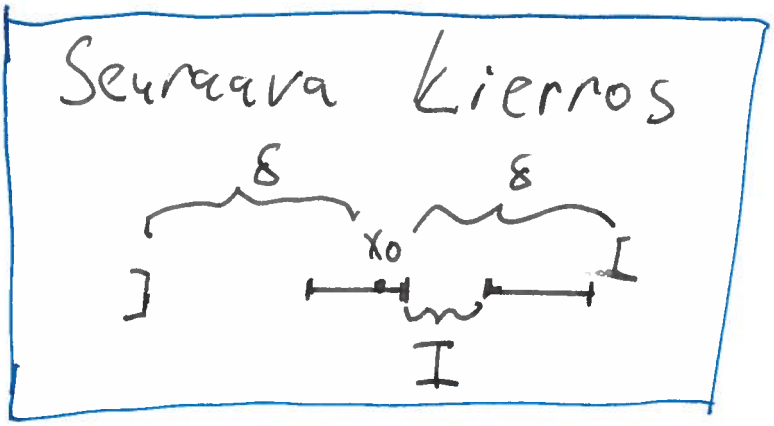
$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset C$.

Valitaan k s.e.

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^k < \delta$$



Seuraava kierros



poistettu $I \not\subset C$ ↯↯

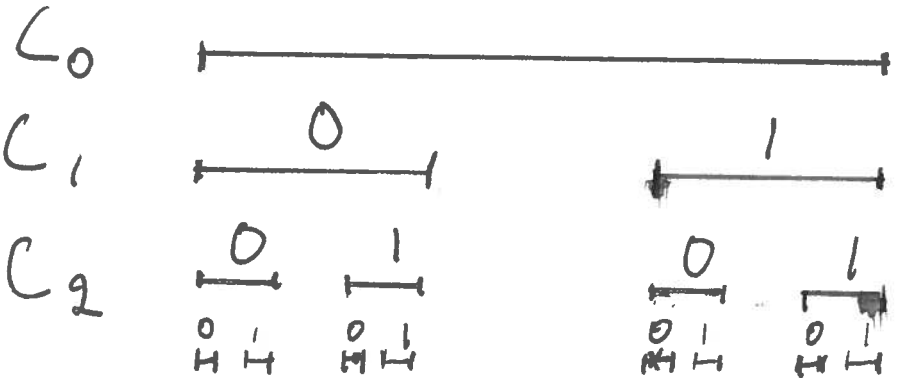
(v) Väli $[0,1]$ ylinumeroituva.

Kukin $x \in [0,1]$ voidaan esittää binäärikehitelmänä

esim

$$0.011011\ldots$$

Cantorin joukon osoitekoodi:



0 = vasen, 1 = oikea

Esim. X kuvassa saa osoitekoodin

.100..

Kukin binääriluku vastaa siis selvästi Cantorin joukon eri pistettä. □

<u>HUOMAA:</u> Cantorin joukon piste voidaan esittää desimaalikehitelmänä kannassa 3:

0 = vasen ja 2 = oikea

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 3^{-k} : \alpha_k \in \{0,2\} \right\}$$

<u>Esim</u>

$$0.0202\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}}$$

$$= \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \in C.$$

Kuitenkin $\frac{1}{4}$ ei ole minkään välin päätepiste, sillä välin päätepisteen kehitelmässä jostain alkaen pelkkää 0 tai 2.

$\Rightarrow$ C sisältää muitakin pisteitä kuin päätepisteet

(tottakai; C oli ylinumeroituva.)

HUOMAA: Kompaktilla joukolla, kuten Cantorin joukolla riittää ottaa Lebesguen mitan määritelmässä äärellinen määrä n-välejä

<u>Syy</u> Kompaktin joukon avoimesta peitteestä löytyy äärellinen osapeite.

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow C \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i \text{ sopivalla } N.$$

Yleensä rajoittuminen äärelliseen määrään välejä ei riitä

<u>Syy:</u>

Jos $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i$

niin aina

$$\sum_{i=1}^{N} v(I_i) \geq 1$$

vaikka oli

$$m^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0.$$

Onko Cantor-tyyppinen joukko aina nollamittainen? $\Rightarrow$ Ei!

<u>Lause</u> Jokaisella $0<\alpha<1$ on olemassa Cantor-tyyppinen joukko $C \subset [0,1]$, jonka Lebesguen ulkomitta on α.

<u>Tod</u> Asetetaan

$$\alpha_j = \frac{1-\alpha}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1-\alpha.$$

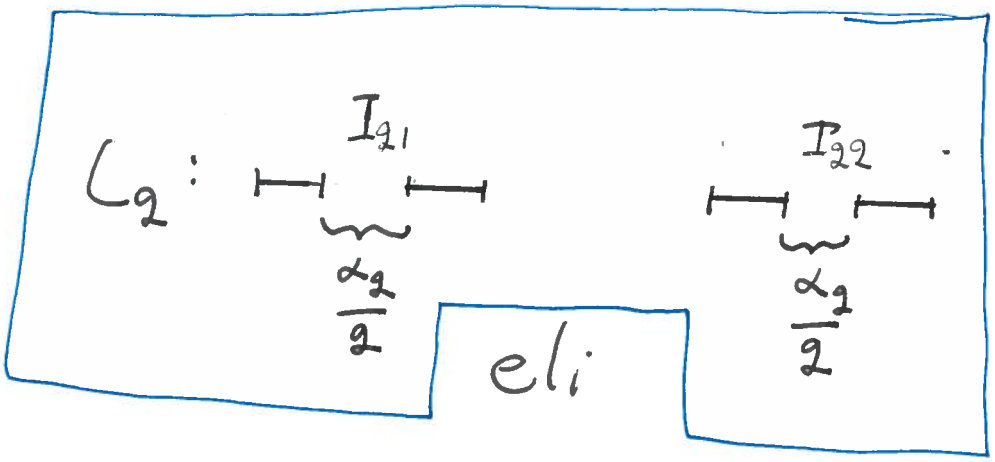
$\boxed{\text{1. askel}}$

$C_1 = [0,1] \setminus I_{11}$, missä $m^*(I_{11}) = \alpha_1$.

ja I_{11} avoin.

$\boxed{\text{2. askel}}$ Poistetaan jäljellejääneiden <u>yhtäpitkien</u>, <u>suljettujen</u> välien <u>keskeltä</u> yhtä pitkät välit

$$m^*(I_{21}) + m^*(I_{22}) = \alpha_2$$



$$C_2 = [0,1] \setminus (I_{11} \cup I_{21} \cup I_{22}).$$

$\boxed{\text{k. askel}}$ k:n askeleen jälkeen olemme poistaneet

$$1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$$

kiinnoksella k poistetut

pistevierusta avointa väliä

$$I_{11}, I_{21}, I_{22}, \ldots, I_{k1}, I_{k2}, \ldots, I_{k2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} m^*(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

$$C_k = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} I_{ij}$$

$$\Rightarrow m^*(C_k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} m^*(I_{ij})$$

I_{ij} pistevieraita-

$I_{ij} \subset [0,1]$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i .$$

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \quad , \text{ joten}$$

niitan omin. j tod. myöhemmin.

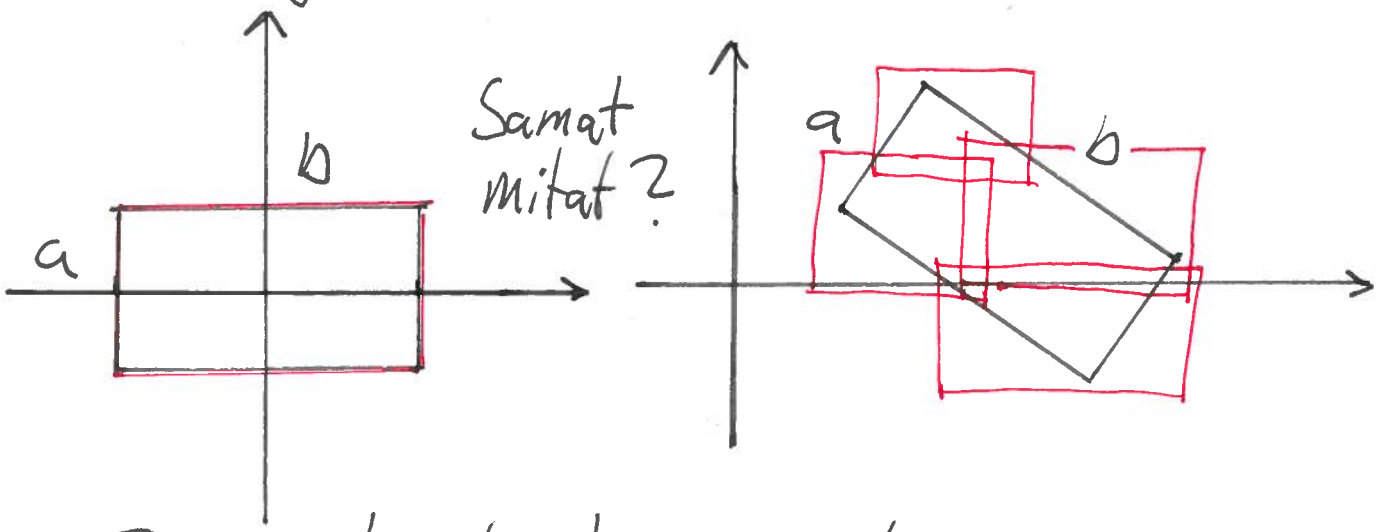
$$m^*(C) = m^*\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} m^*(C_k)$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

$$= 1 - (1-\alpha) = \alpha . \qquad \square$$

<u>HUOMAA</u> Tällä C ei ole sisäpisteitä (ei sis. avointa väliä) mutta mitta > 0.

HUOMAA Määritelmän perusteella ei ole heti selvää, että Lebesguen ulkomitta on (kuten alussa toivottiin) siirto ja kiertoinvariantti.



Tämä kuitenkin pätee.

Yksi tapa on käyttää peittelyyn sisuksiltaan pistevieruita kuutioita ja todistaa tulos kuutioiden kierroille/siirroille.

Siirto: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$Tx = x + b, \quad x, b \in \mathbb{R}^n$$

Kierto: $O: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$|Ox - Oy| = |x - y|$ ja $Ox_0 = x_0$ jollakin x_0.

ei Lineaarikuvaus: $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$L(ax+by) = aLx + bLy, \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n$$

"matriisin antama kuvaus"

ei

<u>Lause</u> (i) $m^*(T(A)) = m^*(A)$.

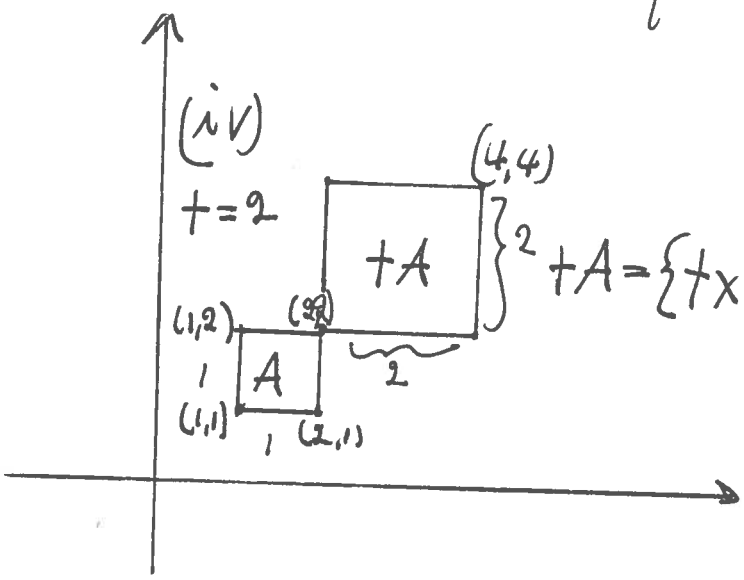
(ii) $m^*(O(A)) = m^*(A)$.

ei (iii) $m^*(LA) = |\det L|\, m^*(A)$

erikois-tapaus

(iv) $m^*(tA) = |t|^n m^*(A)$, $t \in \mathbb{R}$

15.9.2011



$tA = \{tx : x \in A\}$

HUOMAA

Muut asettamamme ehdot pätevät paitsi numerorituva additiivisuus!

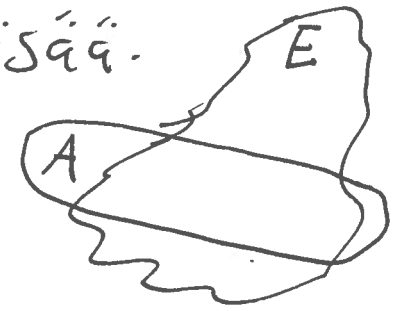
$\boxed{\text{Se ei valitettavasti pätee.}}$

Mitallisuus

Määritelmä Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Leb.-mitallinen, jos

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(E \setminus A), \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

TARKOITTAA Mikä tyvänsä E voidaan jakaa kahteen palaan mitallisa joukolla niin että mittaa ei synny lisää.



HUOMAA

Subadditiivisuus $\Rightarrow m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ pätee aina, joten

A mitallinen

$$\Leftrightarrow$$

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

Merkintä

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ Lebesgue mit.}\}.$$

Esim

(i) $m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \setminus \mathbb{R}^n)$

$= m^*(E) + m^*(\emptyset)$

$= m^*(E)$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ mitallinen

(ii) $m^*(E \cap \emptyset) + m^*(E \setminus \emptyset)$

$= m^*(\emptyset) + m^*(E) = m^*(E)$

$\Rightarrow \emptyset$ on mitallinen

(iii) $m^*(A) = 0$

$\Rightarrow m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$

$\leq m^*(A) + m^*(E \setminus A)$

monotonisuus

$\leq m^*(E)$

$\Rightarrow$ 0-mittainen joukko on mitallinen.

<u>Lemma</u> A Leb. mitallinen $\Leftrightarrow$

$$m^*(S \cup U) = m^*(S) + m^*(U)$$

<u>kaikilla</u> $S \subset A$ ja $U \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

<u>Tod</u> "$\Leftarrow$" Valitaan

$$S = E \cap A \subset A.$$

$$U = E \setminus A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$m^*(S) + m^*(U) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

$$\parallel$$

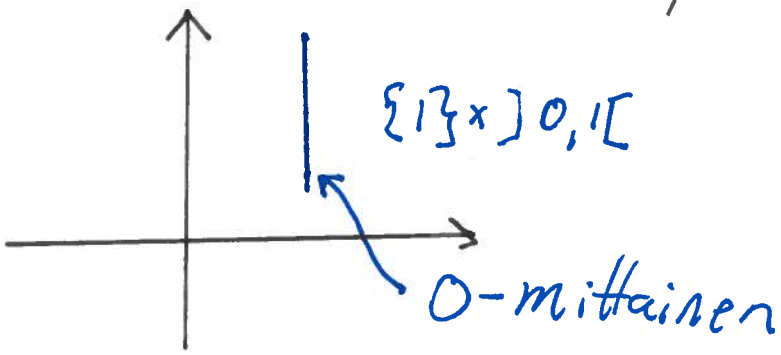
$$m^*(S \cup U) = m^*(E). \Rightarrow \text{mitallinen.}$$

"$\Rightarrow$" Olk. $S \subset A$, $U \subset \mathbb{R}^n \setminus A$

$$m^*(\underbrace{S \cup U}_{=:E}) = m^*(E \setminus A) + m^*(E \cap A)$$

$$= m^*(U) + m^*(S). \quad \square$$

HUOMAA $m^*(A)=0 \not\Rightarrow A=\emptyset$.



Mitallisia joukkoja on paljon, ja kaikki tunnetut konstruoitavissa (ilman valinta-aksioomaa) olevat joukot ovat mitallisia

Lause (i) A, B Leb. mitallisia

$\Rightarrow$ $A \setminus B$ ja $\mathbb{R}^n \setminus A$ Leb. mit.

(ii) $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ Leb. mit

$\Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Leb. mitallinen

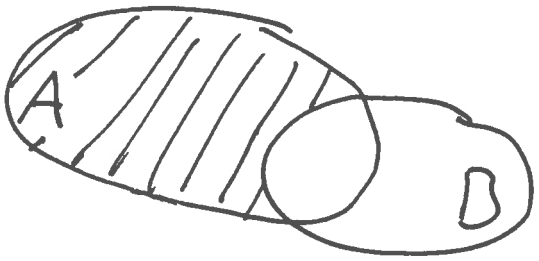
(iii) $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ Leb. mit. ja

$A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$

$$\Rightarrow m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$$

Tod (i) $S \subset A \setminus B$ ja $U \subset \mathbb{R}^n \setminus (A \setminus B)$

$$= (A \setminus B)^c \underset{*}{=} A^c \cup B.$$



$m^*(S) + m^*(U)$

$$= m^*(S) + m^*(U \cap B) + m^*(U \setminus B) \quad (1)$$

B mitallinen

$S \subset A$ ja $U \setminus B \underset{*}{\subset} A^c$, A mitallinen

ed. lemma

$\Rightarrow$

$$m^*(S) + m^*(U \setminus B) = m^*(S \cup (U \setminus B)) \quad (2)$$

$U \cap B \subset B$ ja $S \cup (U \setminus B) \subset B^c$,

B mitallinen

$S \subset B^c$, $U \setminus B \subset B^c$

ed. lemma

$\Rightarrow$

$$m^*(U \cap B) + m^*(S \cup (U \setminus B))$$

$$= m^*((U \cap B) \cup (S \cup (U \setminus B))) \quad (3)$$

$(U \cap B) \cup (U \setminus B) = U$

$$= m^*(S \cup U).$$

(1)(2)(3)

$\Rightarrow m^*(S) + m^*(U) = m^*(S \cup U)$

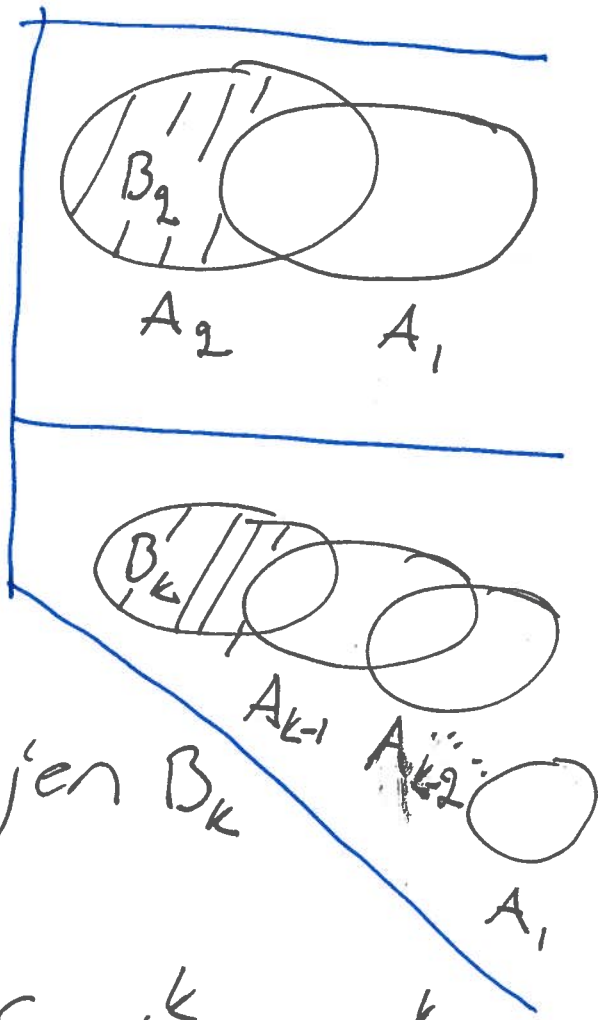
Ed. lemma $\Rightarrow$ $A \setminus B$ mitallinen.

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_n$

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)$



Tarkoitus laasua A_j:n yhdisteet pistevieraiden joukkojen B_k avulla.

<u>Apuväite</u> Olkoon $S_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$

$\Rightarrow S_k \in \mathcal{M}$ ja

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_k^c)$$

kaikilla $E \subset \mathbb{R}^n$.

Apuv. tod. Induktio

$k=1$: $S_1 = A_1 \in \mathcal{M}$

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c)$$

$$= m^*(E \cap A_1) + m^*(E \setminus A_1). \text{ ok.}$$

Induktioaskel $k \to k+1$:

$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k \in \mathcal{M}$$ (i) & (induktio ol. $S_k \in \mathcal{M}$)

$$\Rightarrow m^*(E) = m^*(E \cap B_{k+1}) + m^*(E \setminus B_{k+1})$$

$$= m^*(E \cap B_{k+1}) + m^*(E \cap B_{k+1}^c)$$

$$= m^*(E \cap B_{k+1}) + m^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^c \cap S_k}_{E \cap S_k})$$

induktio-ol. $S_k \in \mathcal{M}$

$$+ m^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^c \cap S_k^c}_{E \cap S_{k+1}^c})$$

ind. ol. sovelletuna summakaava $E \cap S_k$:n

$$\geq m^*(E \cap B_{k+1}) + \left(\sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j)\right.$$

$$\left. + \underbrace{m^*(E \cap S_k \cap S_k^c)}_{=0}\right) + m^*(E \cap S_{k+1}^c)$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_{k+1}^c)$$

$$\geq m^*(S_{k+1} \cap E) + m^*(E \setminus S_{k+1})$$

Subadditiivisuus

$\Rightarrow S_{k+1} \in \mathcal{M}$ ja viimeistä edellinen vaihe implikoi väitteen epäyhtälön. ///

16.9.2011

Jatketaan todistusta

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_k^c)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap A^c)$$

Subadd

$S_k^c A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

$k \to \infty$ tässä käytetään apuväitteen vahvempaa muotoa

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap A^c) \quad (*)$$

$$\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

Subadd