

Lause Olkoon $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avar.
ja $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.

(i) Jos $A_1 \subset A_2$ ja
 $\mu(A_1) < \infty$

$$\Rightarrow \mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$$

(ii) Jos $A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

(iii) Jos $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ja $\mu(A_{k_0}) < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Syy Edellä todistettiin, että

$$\mu^*(A) = \mu(A) \text{ ja että}$$

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A$ on μ^* -mitallinen

$\Rightarrow$ aikaisempi ulkomittojen lause
soveltuu suoraan.

Määritelmä Mitta-avaruus on täydellinen
jos (X, Γ, μ)

$$A \in \Gamma, E \subset A \text{ ja } \mu(A) = 0$$

$$\Rightarrow E \in \Gamma$$

HUOMAA Γ ei välttämättä
sisällä kaikkia 0-mittaisten joukkojen osajoukkoja vaikka Γ_{μ^*} sisältää
(0-mittaiset joukot μ^* -mitallisia)

Esimerkki:

(i) $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukot.

$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$ ei ole täydellinen,

sillä Borelin joukkojen yhteydessä
konstruoitiin 0-mittainen joukko

joka ei ole Borelin joukko
(A ei mitallinen)

$A \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$. Jos $A \subset I$ niin

$$m(\underbrace{I \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{\in \mathcal{B}}) = 0 \text{ ja } A \times \dots \subset I \times \dots \quad (213)$$

ii) (X, Γ, μ^*) on täydellinen kuten edellä todettiin.

Täydellistymä:

Lause Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus.

Määritellään

$$\bar{\Gamma} = \{A \cup N : A \in \Gamma \text{ ja on olemassa } B \in \Gamma \text{ s.e. } N \subset B \text{ ja } \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad \forall A \cup N \in \bar{\Gamma}.$$

$\Rightarrow (X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ on täydellinen mitta-avaruus. Tätä kutsutaan mittavaruuden täydellistymäksi.

Tod: (1) $\emptyset \in \Gamma \Rightarrow \emptyset \in \bar{\Gamma}$

(2) $A_1, A_2, \dots \in \bar{\Gamma}$ missä

$$A_i = C_i \cup N_i, \quad C_i \in \Gamma \text{ ja } N_i \subset B_i \in \Gamma, \quad \mu(B_i) = 0$$

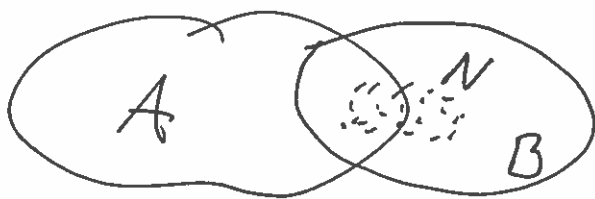
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{\substack{i=1 \\ C_i \in \mathcal{I}}}^{\infty} C_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

$\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ ja
 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{I}}.$$

(3) Olkoon $A \in \mathcal{I}$ ja $N \subset B \in \mathcal{I}$ ja
 $\mu(B) = 0$

$$\Rightarrow (A \cup N)^c = (A \cup B)^c \cup ((B \cap A^c) \setminus N)$$



$$A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow (A \cup B)^c \in \mathcal{I}$$

$$(B \cap A^c) \setminus N \subset B$$

joten $(A \cup N)^c \in \bar{\mathcal{I}} \Rightarrow \bar{\mathcal{I}}$ σ -alg.

$\bar{\mu}$ on hyvin määritelty:

$$\text{Jos } A, \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \bar{F}$$

$$\Rightarrow \exists B_1, B_2 \text{ s.e. } N_1 \subset B_1, \text{ ja}$$

$$N_2 \subset B_2 \text{ ja } \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0.$$

$$\bar{\mu}(A, \cup N_1) \stackrel{\text{määr.}}{=} \mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2)$$

$$A_1 \subset A_2 \cup B_2$$

$$\stackrel{\text{Subadd.}}{\leq} \mu(A_2) + \mu(B_2) \stackrel{\mu(B_2)=0}{=} \mu(A_2) \stackrel{\text{määr.}}{=} \bar{\mu}(A_2 \cup N_2)$$

Toinen suunta samaan tapaan

$$\Rightarrow \bar{\mu}(A, \cup N_1) = \bar{\mu}(A_2 \cup N_2).$$

$\bar{\mu}$ määr. siten, että täydellisyys pätee. $\bar{\mu}$ edelleen mitta:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &\stackrel{A_i = C_i \cup N_i, \text{ pistevieraita}}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (C_i \cup N_i)) \\ &= \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) \stackrel{\text{määr.}}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i \cup N_i). \quad \square$$

C_i it pistev.
 μ mitta $\mathcal{I}$:ssa

$\overline{m}$ äär.

$\text{Esim } (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{M}, m).$

Integraaliteoriaa

Int. teoriaa yleiselle ulkomitalle

Jos on annettu ulkomitta

μ^* ja μ^* -mitalliset joukot

$\mathcal{I}_{\mu^*}$, niin integraaliteorian voi kehittää samoin kuin Leb.

ulkomitalle:

$$u = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i} a_i, \text{ missä } A_i \in \mathcal{I}_{\mu^*}$$

on yk. funktio. $A \in \mathcal{I}_{\mu^*}$; määrit.

$$\int_A u d\mu = \sum_{i=1}^k \mu(A_i \cap A) a_i$$

f μ^* -mitallinen, jos

$$\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{I}_{\mu^*} \\ \text{jne...}$$

Esim $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(A)$
 $X = [1, \infty[$

Siiis esim. $\mu^*([1, 3]) = 1 + 1 = 2$
 $\delta_0([1, 3]) \Rightarrow \delta_1([1, 3])$

Olkoon $\frac{1}{x^2} = f(x)$
 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tarkempi perustelu: HT.

HUOMAUTUS

Vastaavasti voitaisiin todistaa MON, FATOU, DOM.

Integraaliteoria abstrakteissa mitta-avaruudessa

Määritelmä

Olkoon $A \in \Gamma$. Funktio

$f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ on Γ -mitallinen jos
 $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in A : f(x) \geq a\} \in \Gamma.$$

HUOMAA Nyt mitallisuus on
 σ -algebraan Γ liittyvä ominaisuus,
ei mittaan μ . (Γ ei ole
välttämättä Γ_{μ^*} eli mitan suhteen
mitalliset joukot.)

Esim Kuten jo aikaisemmin
määriteltiin, f on Borel-mitallinen
jos
 $\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B} = \text{Borelin}$
joukot

Lause (Vaihtoehdolause)
 $A \in \Gamma$ ja $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$.
Tällöin seuraavat yhtäpitäviä:

- (i) f on Γ -mitallinen
- (ii) $\{x \in A: f(x) \geq a\} \in \Gamma \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- (iii) $\{x \in A: f(x) < a\} \in \Gamma \quad \text{---}$
- (iv) $\{x \in A: f(x) \leq a\} \in \Gamma \quad \text{---}$

Lause $A \in \Gamma$ ja $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$

- (i) $f^{-1}(-\infty) \in \Gamma$ ja $f^{-1}(]a, b[) \in \Gamma$
 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow f$ mitallinen
- (ii) f mitallinen $\Rightarrow f^{-1}(A), f^{-1}(-\infty) \in \Gamma$
ja $f^{-1}(B) \in \Gamma \quad \forall B \subset \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}$.

Todistukset samat kuin
aikaisemmin, koska perustuivat
joukko-oppiin ja σ -algebra todistuksiin.

24. 11. 2011

220.

Vastaavasti kuin aikaisemmin:

Lemma $A \in \Gamma$ ja $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$.

f Γ -mitallinen $\Leftrightarrow f^+$ ja f^- mitallisia

Lemma $f: A \rightarrow [-\infty, \infty], g: A \rightarrow [-\infty, \infty]$
 Γ -mitallisia.

$\Rightarrow f+g$ Γ -mitallinen (mitä tahansa
 fg Γ -mitallinen. joukossa $\mathbb{R}-\infty$)

Lause $A \in \Gamma$. Jos $f_i: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ ovat
 Γ -mitallisia, niin

$\Rightarrow \sup_i f_i, \inf_i f_i, \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i$
 $\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i$ ovat Γ -mitallisia.

Määritelmä $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos f saa äärellisen monta positiivista arvoa ja

$$\{x \in X: f(x) = c\} \in \mathcal{T} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Normaaliesitys:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i}(x) a_i, \quad \forall x \in X.$$

missä A_i epätyhjiä, pistevieraita

ja $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$, ja vakiot $a_i \neq a_j$ jos $i \neq j$.

Esim. $X = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1$$

$$\{x \in X; f(x) > a\}$$

$$= \begin{cases} \emptyset, & a \geq 2 \\ \{1\}, & 1 \leq a < 2 \\ \{1, 2, 3\}, & a < 1 \end{cases}$$

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\} \in \Gamma \Rightarrow f \text{ } \Gamma\text{-mitallinen}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{2, 3\} \in \Gamma, \quad f^{-1}(\{2\}) = \{1\} \in \Gamma$$

$\Rightarrow f$ on yksinkertainen fktio.

HUOMAA

Yllä ei tarvittu mittaa.

Voitaisiin tietenkin valita haluttaessa mitta yö. σ -algebralle (joka siis toteuttaa täysadekvatisuuden.)

Mitaksi kelpaa esim. lukumäärämitta

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\underbrace{\{1, 2, 3\}}_{=X}) = 3$$

$$\mu(\{1\}) = 1, \quad \mu(\{2, 3\}) = 2.$$

Lause $A \in \mathcal{F}$, $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$.

f mitallinen $\Leftrightarrow \exists$ jono f_i
yksinkertaisia
funktioita s.e.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Vastaavasti kuin Leb. integraalilla,
saadaan integraali mitta-avaruudessa:

Määritelmä $A \in \mathcal{F}$

(1) Olkoon $u(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}(x)$
yksinkertaisen funktion
normaaliesitys.

$$\int_A u \, d\mu = \sum_{i=1}^k \mu(A_i \cap A) a_i$$

(2) $f: A \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{F}$ -mitallinen

$$\int_A f \, d\mu = \sup \left\{ \int_A u \, d\mu : 0 \leq u \leq f, \right. \\ \left. u \text{ yks. kert} \right\} \quad A: 559$$

(3) $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -mitallinen. Jos
joko

$$\int_A f^+ d\mu < \infty \text{ tai } \int_A f^- d\mu < \infty$$

niin määritellään

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

(4) f on integroituva, merk. $f \in L^1(A, \mu)$,
jos sekä

$$\int_A f^+ d\mu < \infty \text{ että } \int_A f^- d\mu < \infty.$$

Esim (i) $(\mathbb{N}, \underbrace{\mathcal{P}(\mathbb{N})}_{\text{"}\mathbb{N}\text{:n osajoukot"}}, \mu)$, μ $k\ddot{e}m$ mitta.

Kaikki f $\mathbb{N}$ -fktiot

$f: \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallisia.

(Voidaan samaistaa lukujonon
kanssa $f(n) = a_n$.)

$$f \in L^1(\mathbb{N}, \mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ suppenee itseisesti.}$$

$$\int_A f d\mu = \sum_{j \in A} a_j \quad \forall A \subset \mathbb{N}.$$

(ii) $(X, \mathcal{A}(X), \delta_{x_0})$ mitä-avar.
 $x_0 \in X$ ja δ_{x_0} on Diracin mitä
 $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ $A \subset X$ (Sama kuin aikaisemmin)

$$\int_A f d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Lause $(X, \mathcal{I}, \mu)$ mitä-avaruus.
 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen.

Integraali

$$V(A) = \int_A f d\mu$$

määrittää $\mathcal{I}$ -aan mitan joka on absoluuttisesti jatkuva

mitan μ synteet:

$$\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0.$$

Pätee

$$(i) \quad A \subset B, \quad A, B \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B) \quad (\text{monot.})$$

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

$$(ii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu \quad (\text{subadd.})$$

$$(iii) \quad \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu \quad \text{jos}$$

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ja pistevieraita.

Seuraavaksi Radon-Nikodym lause

Lause (Radon - Nikodym)

Olkoon (X, Γ, μ) äärellinen
mitta-avaruus ja ν mitta Γ :lla

s.e. $\nu(E) \leq \mu(E) \quad \forall E \in \Gamma$. (ν abs.
jva μ suhte)

$\Rightarrow \exists f: X \rightarrow [0, \infty[$ s.e.

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \Gamma.$$

Lisäksi jos $g \geq 0$ on

Γ -mitallinen fktio X :llä niin

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu. \quad \lrcorner$$

(227b)

Esim Absoluuttisen jatkuvuuden oletus tarpeen:

$\delta_{x_0}(A)$ ei absoluuttisesti jatkuva $\mu(A)$:n suhteen.

Ei olemassa funktiota f s.e.

$$\int_A f d\mu = \begin{cases} 0, & x_0 \notin A \\ 1, & x_0 \in A. \end{cases}$$

Määritelmä Ominaisuus pätee μ melkein kaikilla $x \in A$ jos se pätee $A \setminus N$:ssä ja $\mu(N) = 0$.

Lause $f, g \in L^1(A, \mu)$.

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in L^1(A, \mu)$ ja

$$\int_A \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu. \quad (228)$$

Lause $f, g \in L^1(A, \mu)$

$\Rightarrow$ (i) $|f(x)| < \infty$ μ -m.k. $x \in A$

(ii) Jos $f \leq g$ μ -m.k. $x \in A$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \text{ ja}$$

$$|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\mu$$

(iii) (Tsébysev) $\forall 0 < \alpha < \infty$

$$\mu(\{x \in A : |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_A |f| d\mu$$

(iv) $\int_A |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
 μ -m.k. $x \in A$

Lause $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mita-av. ja
 $f_i: A \rightarrow [0, \infty]$ mitallisia fktioita

(i) Jos f_i nouseva

$$\Rightarrow \int_A \lim_{i \rightarrow \infty} f_i d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i d\mu$$

(ii) $\int_A \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i d\mu.$

Lause (DOM) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitä-av.

$f, f_i: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallisia ja

(i) $f_i \rightarrow f$ μ -m.e., $x \in A$

(ii) $\exists g$ s.e. μ -m.e., $x \in A$
 $|f_i(x)| \leq g \in L^1(A, \mu)$

$$\Rightarrow \int_A \lim_{i \rightarrow \infty} f_i d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i d\mu.$$

Lause. (Leb. esitys) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitä-av, ja $f: A \rightarrow [0, \infty]$ ja $0 < p < \infty$.

$$\int_A f^p d\mu = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \mu(\{x \in A : f(x) > \lambda\}) d\lambda$$

Samoin $L^p(A)$ yleistyy

$L^p(A, \mu)$:ksi.

25.11.2011

Luentojen loppu