

Mitta- ja integraaliteoria, syksy 2011

Harjoitus 7

1. Olkoon $0 < s < 1$. Laske raja-arvo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{ix^s}{1+ix} dx.$$

2. Formuloi ehdot, ja todista Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen toinen muoto

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_i - f| dx = 0.$$

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Näytä, että

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x) dx = f(x_0).$$

4. (Monisteen Seuraus 6.7) Olkoon A mitallinen, $m(A) < \infty$, ja $f_i \in L^1(A)$, ja $f_i \rightarrow f$ tasaisesti A :ssa. Näytä, että $f \in L^1(A)$ ja

$$\int_A f dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i dx.$$

5. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-|x|^2/i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

6. Konstruoi Riemann integroitava funktio $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka on epäjatkuva ylinumeroituvan monessa pisteessä.
7. Olkoon $C \subset [0, 1]$ alkukurssista konstruoitu Cantor-tyyppinen joukko, jolle $m(C) > 0$. Osoita, että ei ole Riemann integroituvaa funktiota $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $f = \chi_C$ m.k. $x \in [0, 1]$. Entä Lebesgue integroituvuus?