

Mitta- ja integraaliteoria, syksy 2011
Harjoitus 4

1. Olkoon $d \in \mathbb{R}$. Määritellään

$$m_d^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$$

missä $\inf$ otetaan yli kaikkien avoimien n -välien joille $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ja $\text{diam}(I_i) < d$, $i = 1, 2, \dots$ (diam =halkaisija) Osoita, että $m_d^*(A) = m_d^*(A)$.

2. Olkoot $E, F \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja, joiden etäisyys on positiivinen eli

$$\text{dist}(E, F) = \inf\{|x - y| : x \in E, y \in F\} > 0.$$

Näytä, että $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yksinkertainen funktio ja joukot $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ pistevieraita ja Lebesgue mitallisia. Osoita, että

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, dx.$$

4. Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos

$$A = B \cup N$$

missä B on Borelin joukko ja $m^*(N) = 0$.

5. Totea, että funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$

$$f = 3\chi_{[0,2]} + 2\chi_{[1,3]} + \chi_{\mathbb{Q}}$$

on yksinkertainen. Määrittää sen normaaliesitys ja laske integraali $\int_{\mathbb{R}} f \, dx$.

6. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yksinkertainen funktio. Näytä että se on mitallinen

(i) Määritelmän avulla.

(ii) Mitallisiin funktioiden luennolla todistettujen ominaisuuksien avulla.

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallinen ja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$, jolle pätee, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ (melkein kaikilla tarkoittaa että 0-mittaista joukkoa lukuunottamatta). Todista, että g on mitallinen.