

Mitta- ja integraaliteoria, syksy 2011

Harjoitus 3

1. Olkoon $I =]-1, 1[\times]-1, 1[$, jolloin $m^*(I) = v(I) = 4$. Kierrä tätä neliötä 45 astetta, että saat neliön J . Osoita approksimoimalla sopivilla joukoilla ulkoa ja sisältä, että myös $m^*(J) = 4$.
2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $m^*(\partial A) = 0$, niin joukko on mitallinen.
3. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(B) = 0$. Näytä, että A on mitallinen jos ja vain jos $A \cup B$ on mitallinen.
4. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva. Näytä, että $f(\mathbb{R}^n)$ on mitallinen. Vihje: Jatkuva kuvaava kompaktin kompaktiksi. Huomautus: Ei kuitenkaan päde aina, että jatkuva kuvaaisi mitallisen joukon mitalliseksi.
5. Käy läpi Kilpeläisen luentomonisteen sivulla 17-18 oleva esimerkki. Alaviitettä ei tarvitse tarkastella.
6. Todista, että

$$m(A) = \inf\{m(U) : A \subset U, U \text{ avoin}\}$$

jokaiselle Lebesguen mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$.

7. Todista, että

$$m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A, K \text{ kompakti}\}$$

jokaiselle Lebesguen mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$. Tätä kutsutaan joskus sisämitaksi.

Vihje: Merkataan $Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < k, i = 1, 2, \dots, n\}$ avointa kuutiota. Riittää todistaa väite joukolle $A \cap Q_k$ (miksi?). Käytä sopivasti Tehtävää 6 joukkoon $Q_{k+1} \setminus (A \cap Q_k)$.