

Mitta- ja integraaliteoria, syksy 2011

Harjoitus 11

1. Anna esimerkki ulkomitasta μ^* ja joukoista A_i joille $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu^*(A_i) < \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \int_M f \, dx : M \in \mathcal{M}_n, E \subset M \right\}$$

on ulkomitta. Näytä, että jos $A \in \mathcal{M}_n$, niin A on μ^* -mitallinen. Päteekö käänteinen tulos?

3. Tarkastellaan Hausdorffin $\frac{1}{2}$ -sisältöä $H_{\infty}^{\frac{1}{2}}$ joukossa $\mathbb{R}$.

(i) Osoita, että $H_{\infty}^{\frac{1}{2}}(I) = v(I)^{\frac{1}{2}}$ kaikille rajoitetuille väleille $I \subset \mathbb{R}$.

(ii) Näytä, että väli $[0, 1]$ ei ole $H_{\infty}^{\frac{1}{2}}$ -mitallinen.

Vihje: Olkoon $a_i \geq 0$. Tällöin $\sum a_i^{\frac{1}{2}} \geq (\sum a_i)^{\frac{1}{2}}$.

4. Todista Lebesguen numero lemma: Olkoon $C \subset \mathbb{R}$ 1/3-Cantorin joukko ja siis kompakti joukko. Olkoon $\cup_{i=1}^{\infty} I_i$ avoin peite C :lle. Tällöin on olemassa tarpeeksi suuri k siten että $J_{k,j} \subset I_i$ kaikilla j jollekin I_i . Edellä $J_{k,j}$ on suljettu väli jolle $C_k = \cup_j J_{k,j}$.

5. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Luettele joukon X σ -algebrat.

6. Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$, $0 < s < \infty$ ja $\delta > 0$. Näytä, että $H_{\delta}^s(A) = 0$ jos ja vain jos $H^s(A) = 0$.

7. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja $Y \subset X$. Määritellään rajoittuma

$$\mu^*|_Y(A) = \mu^*(Y \cap A).$$

Osoita, että $\mu^*|_Y$ on ulkomitta X :ssä.