
Fysiikka III

Termodynamiikka ja Optiikka

Juha Merikoski

Jyväskylän yliopiston Fysiikan laitos
Kevät 2009

1

Kurssin sisältö

Osa 1: **TERMODYNAMIIKKA**

- 17. Lämpö ja lämpötila
- 18. Aineen termisiä ominaisuuksia
- 19. Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö ja työ
- 20. Termodynamiikan toinen pääsääntö ja entropia

Osa 2: **OPTIIKKA**

- 33. Valo ja sen eteneminen
- 34. Geometrinen optiikka ja sovelluksia
- 35. Kahden aallon interferenssi ja superpositio
- 36. Aallon interferenssi itsensä kanssa eli diffraktio

2

Osa 1: **TERMODYNAMIIKKA**

Olemme kiinnostuneita termodynaamisista suureista, jotka ovat
-makroskooppisen ainemäärän ominaisuuksia kuvaavia:

$$U, T, S, P, V, C, \dots$$

sisäenergia, lämpötila, entropia, paine, tilavuus, lämpökapasiteetti,...

-tai energian siirtymistä kuvaavia:

$$W, Q, H, \dots$$

työ, lämpö, lämpövirta,...

Tarkastelemme lyhyesti myös TD:n mikroskooppista perustaa
-kineettistä teoriaa: molekyylien liike ja törmäykset
-statistista mekaniikkaa: entropian tilastollinen tulkinta

$$\text{entropia} \nearrow S = k_B \ln w \searrow \text{mikrotilojen lkm}$$

Luvut 17–18 ovat fenomenologiaa, luvut 19–20 teoreettisempia.

3

17. **Lämpötila ja lämpö**

17.1 **Lämpötila ja terminen tasapaino**

Lämpötila (T) on määriteltävissä makrotasolla: Tarvitaan 'vain'
lämpötila-asteikko (toistaiseksi mielivaltainen), esimerkiksi

-nestelämpömittari: $T \leftrightarrow$ nestepatsaan korkeus

-kaasulämpömittari: $T \leftrightarrow$ kaasun paine

-metallilanka lämpömittarina: $T \leftrightarrow$ resistanssi

Kappaleen lämpötila mitataan saattamalla se kontaktiin valitun
lämpömittarin kanssa. Mittarin lukeman asetuttua sanomme, että
mittari ja kappale ovat keskenään **termisessä tasapainossa** (TTP).

Termodynamiikan nollas pääsääntö: Jos järjestelmä C on
TTP:ssa sekä järjestelmän A että järjestelmän B kanssa, ovat
järjestelmät A ja B myös keskenään TTP:ssa.

4

Edellisen sovellus: Olkoon C lämpömittari. A ja B ovat keskenään TTP:ssa \Leftrightarrow niiden lämpötilat mitattuna C:lla ovat samat.

17.2-3 Kaasulämpömittari ja lämpötila-asteikot

Haluamme mittarissa käytetystä materiaalista riippumattoman lämpötila-asteikon. Kaasulämpömittarin lukema on vakio-tilavuudessa pidetyn harvan kaasun paine, joka muunnetaan lämpötilaksi:

Celsius-asteikko: Käytetään kalibrointiin veden kiehumispistettä ja sulamispistettä (1 atm paineessa). Olkoot ne 100°C ja 0°C , jolloin asteikko tulee kiinnitetyksi sanomalla, että lämpötila on kaasun paineen lineaarinen funktio. Ekstrapolaatio havainnoista näissä kahdessa pisteessä $\Rightarrow -273,15^\circ\text{C}$:ssa kaasun paine olisi nolla (riippumatta kaasumäärästä), joten luonnollinen valinta asteikon nolapisteksi onkin tämä piste. Otetaan siksi käyttöön...

5

Kelvin-asteikko: Lämpötila on nyt suoraan verrannollinen kaasulämpömittarin painelukemaan, joten kalibrointiin tarvitaan vain yksi lämpötila. Veden erikoispisteistä tähän sopii parhaiten sen kolmoispiste, koska kolmoispisteessä tasapainossa olevalla (puhtaalla) vedellä on aina sama lämpötila ja paine. Määritellään sitten $T_{\text{triple}}^{\text{water}} \equiv 273,16\text{ K}$, jolloin lämpömittarin painelukemasta P saadaan Kelvin-lämpötila kaavalla

$$T = \frac{P}{P_{\text{triple}}^{\text{water}}} \cdot 273,16\text{ K}, \quad (1)$$

missä $P_{\text{triple}}^{\text{water}}$ on mittarin painelukema veden kolmoispisteessä.

Olemme näin ainakin periaatteessa palauttaneet (absoluuttisen) lämpötilan mittaamisen (suhteellisen) paineen mittaamiseen.

Huom: $P_{\text{triple}}^{\text{water}} \approx 0,006037\text{ atm} \approx 611,73\text{ Pa}$.

6

Huom: Kaasulämpömittarit ovat lämpötilasta (ja myös asteikon lineaarisuudesta) samaa mieltä vain silloin, kun niissä käytetyt kaasut ovat riittävän harvoja. Sisältämänsä kaasun harvetessa kaasulämpömittari lähestyy teoreettisessa mielessä ideaalista mittaria, joskin toteutuksessa tulee vastaan muita ongelmia.

Huom: Vaikka ulkona tähän vuodenaikaan voi olla vettä kolmessa olomuodossa, eivät olosuhteet ($T, P=1 \text{ atm}$) kuitenkaan vastaa veden kolmoispistettä. Kyseessä on epätasapainotilanne, vesi ei ole puhdasta ja olisi tarkasteltava vesihöyryn osapainetta.

Huom: Järjestelmän lämpötila voidaan määritellä myös lähtien järjestelmän sisäisistä ominaisuuksista entropian käsitteen kautta viittaamatta mihinkään erityiseen lämpömittariin: termodynaamisten muuttujien avulla kirjoitettuna $1/T = \partial S/\partial U$. Näin saatavan lämpötilan voidaan osoittaa olevan yhtäpitävä edellä esitetyn (ideaali)kaasulämpömittarin antaman lämpötilan kanssa.

7

17.4 Lämpölaajeneminen

Materiaalin **lineaarinen lämpölaajenemiskerroin** α määritellään

$$dL = \alpha L dT \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}, \quad (2)$$

missä L on kappaleen lineaarinen koko (esim. pituus). Vastaavasti määritellään **tilavuuden lämpölaajenemiskerroin** β

$$dV = \beta V dT \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}, \quad (3)$$

missä V on materiaalin/kappaleen/nesteen/kaasun/jne tilavuus. Isotrooppisessa tapauksessa

$$\beta = 3\alpha, \quad (4)$$

sillä esimerkiksi kuutionmuotoiselle kappaleelle ($V = L^3$) on

$$dV = \frac{dV}{dL} dL = 3L^2 dL = 3L^2 \alpha L dT = 3\alpha V dT.$$

8

Kapeassa lämpötila-alueessa $[T, T + \Delta T]$ lämpölaajenemiskerroin on oleellisesti vakio, joten alunperin L_0 -pituisen kappaleen pituuden muutos ΔL lämpötilan muuttuessa ΔT :n verran saadaan lineaarisella approksimaatiolla $L(T_0 + \Delta T) \approx L(T_0) + \Delta T \cdot (dL/dT)_0$

$$\Rightarrow \Delta L \approx \alpha L_0 \Delta T \quad \text{ja vastaavasti} \quad \Delta V \approx \beta V_0 \Delta T. \quad (5)$$

Huom: Kertoimet α, β ovat materiaalikohtaisia parametreja, jotka vakio-olosuhteissa eivät riipu ainemäärästä (kunhan makroskooppinen). Jos materiaalin mikrotason rakenne (esim. kiinteä kide) on epäisotrooppinen, α riippuu tarkastelusuunnasta.

Huom: Kertoimia α, β voidaan tavallisesti pitää vakioina, kunhan tarkasteltava lämpötila-alue ei ole suuri. Lämpötilanmuutokset ovat arkioloissa usein vain kymmenen asteen suuruusluokkaa eli kymmenisen prosenttia absoluuttisesta lämpötilasta. Hyvin tarkkana on oltava olomuodonmuutosten läheisyydessä, jolloin α, β ja muut materiaaliparametrit voivat riippua T :sta voimakkaastikin.

9

Esim: Kupari: $\alpha \approx 2,4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Kvartsi: $\alpha \approx 0,04 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Esim: Vesi 1 atm paineessa: $\beta < 0$ kun $0^\circ\text{C} < T < 4^\circ\text{C}$.

Esim: Olkoon L_0 -pituisen metallitanko päistään kiinnitetty. Nostetaan sitten sen lämpötilaa ΔT :n verran. Koska tanko ei pääse laajenemaan, syntyy jännitys, joka kumoaa lämpölaajenemisen vaikutuksen:

$$(\Delta L/L_0)_{\text{term}} + (\Delta L/L_0)_{\text{jann}} = 0$$

Nyt (5) antaa $(\Delta L/L_0)_{\text{term}} = \alpha \Delta T$ ja edelliseltä kurssilta (Young & Freedman luku 11.4) muistamme, että $(\Delta L/L_0)_{\text{jann}} Y = F/A$, missä elastinen vakio Y , Youngin moduli, on materiaaliparametri.
 \Rightarrow Jännitys eli voima tangon poikkipinta-alan yksikköä kohti on

$$F/A = -\alpha Y \Delta T.$$

10

17.4 Lämpö

Nesteen lämpötilaa voidaan kasvattaa pyörittämällä nesteessä siipiratasta (ratiaan pyörittämiseksi tehtävä työtä) tai kuumentamalla sitä keittolevyllä (lämmönsiirto). James Joule totesi, että kummallakin tavalla nesteen sisäenergia kasvaa saman, approksimatiivisesti lämpötilan muutokseen ΔT verrannollisen, määrän.*

Energiamäärää Q , joka siirtyy puhtaasti lämpötilaeron vuoksi, kutsutaan nimellä **lämpö**.** Materiaalin **ominaislämpökapasiteetti** (ominaislämpö) c ja **molaarinen lämpökapasiteetti** C määritellään

$$Q = mc\Delta T \quad Q = nC\Delta T \quad m = nM, \quad (6)$$

missä m on massa, n moolien lukumäärä ja M moolimassa.

*Energian säilymisen perusteella sisäenergian muutos voi olla seurausta ainoastaan energian siirtymisestä (lämpö ja työ).

**Tämä ei ole lämmön yleinen määritelmä, vrt. luku 19.

11

Yleisemmin voimme kirjoittaa esimerkiksi

$$dQ = mc dT \quad c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad (7)$$

missä on kuitenkin muistettava, että vaikka dT on kappaleen lämpötilan muutos, ei dQ ole kappaleen lämmön muutos vaan kappaleeseen siirtyvä lämpö (dQ ei ole eksakti differentiaali).

Lämpökapasiteetti riippuu olosuhteista, joissa mittaus tehdään. Erityisesti kaasujen kohdalla on oleellista tehdä ero vakiotilavuudessa ja vakioaineessa mitattujen lämpökapasiteettien välillä, jolloin niitä merkitään c_V :llä ja c_P :llä tai C_V :llä ja C_P :llä.

Huom: Yleisesti ottaen ominaislämpökapasiteetti ei ole vakio vaan riippuu paineen ohella myös lämpötilasta. Muotoja (6) voi kuitenkin käyttää monille materiaaleille varsin laajalla lämpötila-alueella olettaen lämpökapasiteetit vakioiksi.

12

17.4 Faasimuutoksen latentti lämpö

Faasimuutoksia ovat esimerkiksi arkiset olomuodonmuutokset (kiinteä \leftrightarrow neste \leftrightarrow kaasu). Faasimuutoksiin liittyy tavallisesti **latenttia lämpöä**, mistä esimerkkejä olkoot nyt **sulamislämpö** L_f ja **höyrystymislämpö** L_v (tavallisesti massan yksikköä kohti).

Näissä prosesseissa aineeseen tai aineesta siirtyvä lämpö on*

$$Q = \pm mL_{\text{lat}} \quad L_{\text{lat}} = L_f, L_v, \dots \quad [L_{\text{lat}}] = \text{J/kg.} \quad (8)$$

Faasimuutos on **palautuva** siten, että vaihdettaessa sen suuntaa ainoastaan Q :n etumerkki muuttuu. Kaksi faasia (tai useampi) voi olla keskenään **faasitasapainossa** sopivissa olosuhteissa (esim. jotkin tietyt T ja P) eli faasirajalla, jolla faasimuutos tapahtuu. Palaamme tähän tarkemmin luvussa 18.6.

*Latentti lämpö riippuu siitä, missä faasirajan kohdassa ollaan, mutta monissa käytännön laskuissamme sitä voidaan pitää materiaalikohtaisena vakiona.

13

17.5 Kolme lämmönsiirtomekanismia

Lämmönjohtuminen tapahtuu aineen kautta/läpi ilman makroskooppisia massavirtoja. Siihen liittyvä **lämpövirta** $H = dQ/dt$ on (yleensä) suoraan verrannollinen lämpötilaeroon.

Jos L -pituisen tangon päät ovat lämpötiloissa $T(x=L) = T_C$ ja $T(x=0) = T_H > T_C$ ja jos lisäksi tanko on sivuiltaan eristetty, niin *stationaarisessa tilassa* lämpövirta tangon pituussuuntaan on

$$H = kA \frac{T_H - T_C}{L}, \quad (9)$$

missä k on tangon **lämmönjohtavuus** ja A poikkipinta-ala.

Lämpöeristekerroksen (paksuus L) **lämpövastus** on*

$$R = L/k. \quad (10)$$

*Analogia sähkönjohtavuuden ja sähkövastuksen kanssa on ilmeinen. Lämpötilaeroa vastaa sähkövirtaa ajava jännite-ero.

14

Yleisemmin: Lämpövirta kohdassa x poikkipinnan A läpi on*

$$H(x) = -kA \frac{dT(x)}{dx} \quad (11)$$

mikä tunnetaan nimellä **Fourier'n laki**. Miinusmerkki takaa, että lämpö siirtyy alenevan lämpötilan suuntaan.**

Havaitsemme (11):stä myös, että jos edellisen sivun tangon sivuilta ei tapahdu energiahäviöitä, on $H(x)$:n oltava vakio ja dT/dx sama kaikilla x , joten tangon lämpötilaprofiili on lineaarinen.

Huom: Lämmönjohtuminen pyrkii tasoittamaan lämpötilaeroja siirtämällä energiaa. Yleisessä tapauksessa lämpötila on sekä paikasta että ajasta riippuva. Sovelluksissa onkin mietittävä onko kyse stationaarisesta tilasta vai transientista ilmiöstä.

*Vielä yleisemmin: Jos sallimme kaikkiin suuntiin muuttuvan lämpötilakentän eli $T = T(x, y, z)$, on lämpövirrantiheys $\vec{j}(x, y, z) = -k\nabla T(x, y, z)$.

**Vaatimus seuraa termodynamiikan 1. ja 2. pääsäännöstä, kts. luku 20.

15

Säteily (sähkömagneettinen) on toinen lämmönsiirtomekanismi. Kappaleen (pinta-ala A) säteilemällä emittoiman lämpövirran antaa **Stefanin-Boltzmannin laki**

$$H = Ae\sigma T^4, \quad (12)$$

missä $e \in [0, 1]$ on pinnan **emissiivisyys** (yksikötön) ja kerroin $\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60 \hbar^3 c^2 \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ on luonnonvakio. Olkoon säteilevä kappaleemme (lämpötila T) ympäristössä, jonka lämpötila on T_s . Lämpöä siirtyy kappaleen pinnan läpi kumpaankin suuntaan ja nettovirta kappaleesta on

$$H_{\text{net}} = H_{\text{out}} - H_{\text{in}} = Ae\sigma(T^4 - T_s^4), \quad (13)$$

koska emissiivisyys on sama kumpaankin suuntaan.

Huom: Kappale säteilee kaikilla aallonpituuksilla. Vakion σ arvo saadaan integroimalla aallonpituuksien yli (kirjan luku 38.8).

16

Lämmön johtuminen ja säteily ovat puhtaasti lämpötilaerosta johtuvaa lämmönsiirtoa – kolmas lämmönsiirtomekanismi ei ole:

Konvektio on lämmönsiirtoa fluidissa massavirtauksen mukana. Konvektiota on kahta päätyyppiä:

- Vapaa konvektio: virtaus esim. lämpölaajenemisen vuoksi
 - Pakotettu konvektio: puhallin/pumppu tuottaa virtauksen
- Konvektion yleinen matemaattinen kuvailu on hankala emmekä ryhdy siihen tässä. Joitakin melko usein päteviä havaintoja:
- Lämpövirta pinnan (ala A) läpi on $H \propto A$
 - Kiinteältä pinnalta fluidiin $H \propto \Delta T$ approksimatiivisesti
 - Konvektio riippuu fluidin viskositeetista (pyörteisyys jne)

Huom: Lämpöä voi samanaikaisesti siirtyä sekä johtumalla, säteilemällä että konvektiivisesti. Lämpötilaeron ΔT ollessa pieni voidaan monesti olettaa kaikille näille mekanismeille lineaarinen riippuvuus ΔT :stä, sillä (13):ssakin $T^4 - (T - \Delta T)^4 \approx 4T^3 \Delta T$.

17

17.X Kurssikirjan esimerkkejä

Example 17.7

Elektroninen piiri on tehty piistä ja painaa 23 mg. Millä nopeudella piirin lämpötila nousee sen läpi kulkevan virran tuottaessa lämpöä teholla 7.4 mW, jos piiriä ei mitenkään jäähdytetä?

Ratkaisu: Yhtälöstä (7) eli $dQ = mc dT$ saammekin välittömästi tuloksen $dT/dt = (dQ/dt)/cm = \dots = 0,46 \text{ K/s}$.

Example 17.8

Fyysikon 120 g painava tyhjä alumiinikuppi on aluksi lämpötilassa 20°C . Kemisti kaataa siihen 3 dl 70-asteista teetä. Unohtaen lämpöhäviöt ympäristöön, mikä on teen ja kupin lämpötila T , kun ne ovat saavuttaneet termisen tasapainon keskenään?

Ratkaisu: Teelle $Q_t = m_t c_t (T - T_t)$. Kupille $Q_k = m_k c_k (T - T_k)$. Ilman lämpöhäviöitä $Q_t + Q_k = 0$, johon sijoittamalla edelliset voimme ratkaista lämpötilan $T = \dots = 66^\circ\text{C}$.

18

Example 17.9

Lisätään styrox-mukissa olevaan $+25\text{ }^\circ\text{C}$ lämpötilassa olevaan 2,5 dl pepsi-annokseen $-20\text{ }^\circ\text{C}$ lämpötilassa oleva jääpala. Kuinka suuri jääpala tarvitaan juoman jäähdyttämiseen 0-asteiseksi?

Ratkaisu: Pepsille $Q_p = m_p c_p (T - T_p)$. Mukille $Q_m \approx 0$. Jälle $Q_j = m_j c_j (T - T_j) + m_j L_f$. Nyt $Q_p + Q_m + Q_j = 0$ ja $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$, joten voidaan ratkaista ainoa tuntematon: $m_j = \dots = 69\text{ g}$.

Example 17.13

20 cm pitkän kuparitangon jatkeeksi on hitsattu 10 cm pitkä terästanko, kummankin poikkipinta-ala 4 cm^2 . Kuparitangon vapaa pää pidetään kontaktissa 100-asteisen höyryn kanssa ja terästangon vapaa pää 0-asteisen jään kanssa. Olettaen tangot sivuiltaan eristetyiksi, laske lämpötila tankojen liitoskohdassa.

Ratkaisu: Kaava (9) kuparille $H_k = A(T_H - T)k_k/L_k$. Teräkselle $H_t = A(T - T_C)k_t/L_t$. Nyt $H = H_k = H_t$, josta $T = \dots = 21\text{ }^\circ\text{C}$.

19

Example 17.14

Asetetaan edellisen esimerkin tangot rinnakkain ja päistään kontaktiin höyryn ja jään kanssa. Laske kokonaislämpövirta.

Ratkaisu: $H = H_k + H_t = A(T_H - T_C)(k_k/L_k + k_t/L_t) = 97\text{ W}$.

Huom: Lauseke yllä vastaa rinnan kytkettyjen sähkövastusten johtavuutta. Myös edellisen esimerkin tapauksessa voisimme helposti laskea lämpövirran sijoittamalla saatu T joko H_k :n tai H_t :n lausekkeeseen. Kiinnostavampaa voi olla kirjoittaa ratkaisu muotoon $H = A(T_H - T_C)/(L_k/k_k + L_t/k_t)$, mikä vastaa sarjaan kytkettyjen sähkövastusten johtavuuden lauseketta.

Example 17.16

Arvioi säteilylämmönsiirto ihmisen iholta (emissiivisyys ≈ 1).

Ratkaisu: Arvioiden pinta-alaksi 1 m^2 ja $T = 30\text{ }^\circ\text{C}$ (iholla) ja $T_s = 20\text{ }^\circ\text{C}$ (huone) saamme $H_{\text{out}} = Ae\sigma T^4 \approx 500\text{ W}$ ja nettolämpövirraksi $H_{\text{net}} = H_{\text{out}} - H_{\text{in}} = Ae\sigma(T^4 - T_s^4) \approx 60\text{ W}$.

Huom: Vain erotuksia laskettaessa turvallista käyttää C-asteita. Muutoin, kuten yllä potenssiinkorotuksissa, käytettävä K-asteita!

20