2. Interpolointi

Olkoon annettuna $n+1$ *eri* pistettä $x_0, x_1 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ja $n+1$ lukua $y_0, y_1, \ldots, y_n$. *Interpoloinnissa* etsitään funktiota P, joka annetuissa pisteissä $x_0, \ldots, x_n$ saa annetut arvot $y_0, \ldots, y_n$,

$$P(x_j) = y_j, \quad 0 \le j \le n. \tag{2.1}$$

Myöhemmin tarkasteltavissa *approksimointiongelmissa* etsitään funktiota P, jolle virhe $P(x_j) - y_j$, $0 \le j \le n$, on "pieni".

Yksinkertaisimmassa *lineaarisessa interpoloinnissa* $n = 1$ ja etsitään funktiota P, joka kahdessa annetussa pisteessä x_0 ja x_1 saa annetut arvot y_0 ja y_1, t.s. jonka kuvaaja kulkee annettujen pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta. Eräs ratkaisu, luonnollisin, on näiden pisteiden kautta kulkeva suora, t.s.

$$P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = \frac{y_1 (x - x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{y_0 (x - x_1)}{x_0 - x_1}.$$

2.1. Lagrangen interpolaatiopolynomi. [**4**, luku 5, §A.II], [**11**, §9.1], [**12**, luku 8], [**7**, §5.2–5.3], [**5**, luku IX, liite]

Osoitetaan seuraavaksi, että interpolaatio-ongelma voidaan aina ratkaista polynomien avulla. Osoitetaan aluksi, että on olemassa polynomi L_j, joka pisteessä x_j saa arvon yksi, ja arvon nolla muissa pisteissä x_k, $k \ne j$. Tätä varten olkoon

$$P_j(x) := \prod_{k \ne j} (x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n).$$

Tällöin $P_j(x_k) = 0$, kun $k \ne j$, ja $P_j(x_j) = \prod_{k \ne j}(x_j - x_k) \ne 0$, koska pisteet x_k ovat keskenään erisuuria. Asetetaan

$$L_j(x) := \frac{P_j(x)}{P_j(x_j)} = \prod_{k \ne j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \tag{2.2}$$

Tällöin $L_j(x_k) = 0$, kun $k \ne j$, ja $L_j(x_j) = 1$.

Alkuperäiselle interpolaatio-ongelmalle saadaan nyt ratkaisu

$$P(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x). \tag{2.3}$$

Tätä polynomia kutsutaan *pisteiden* $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ *määräämäksi Lagrangen interpolaatiopolynomiksi.*

Koska jokaisen polynomin L_j aste on n, on $n+1$ pisteen määräämän Lagrangen interpolaatiopolynomin aste enintään n. Osoitetaan seuraavaksi, että $n+1$ pisteen interpolaatio-ongelmalla on ainoastaan yksi enintään astetta n oleva polynomiratkaisu. Olkoot P ja Q polynomeja, joille

$$\begin{aligned} &\deg P \le n \quad \text{ja} \quad P(x_j) = y_j, \quad \text{kun } 0 \le j \le n, \quad \text{sekä} \\ &\deg Q \le n \quad \text{ja} \quad Q(x_j) = y_j, \quad \text{kun } 0 \le j \le n. \end{aligned}$$

Olkoon $R := P - Q$. Tällöin R on polynomi, jonka aste on enintään n ja joka saa arvon $R(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = y_j - y_j = 0$ $n+1$ eri pisteessä. Tämä on mahdollista vain, kun $R(x) \equiv 0$, t.s. $P = Q$. Kirjataan edellisten päätelmien yhteenvetona

[7] Viimeksi muutettu 10.1.2012.

Lause 2.1. *Olkoot x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in \mathbb{R}$ keskenään erisuuria ja y_0, y_1, $\ldots$, $y_n \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi polynomi P siten, että*

$$\deg P \leq n \quad ja \quad P(x_j) = y_j, \quad kun\ 0 \leq j \leq n.$$

Huomautus 2.2. Edellisissä laskuissa, joilla määrättiin polynomit L_j ja interpolaatio-ongelman ratkaiseva Lagrangen interpolaatiopolynomi P, käytettiin ainoastaan yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua. Näinollen vastaavat päättelyt voidaan tehdä, vaikka reaalilukujen kunnan $\mathbb{R}$ tilalla olisi mikä tahansa kunta $\mathbb{F}$. Siis: Olkoon $\mathbb{F}$ kunta, x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in \mathbb{F}$ keskenään erisuuria ja y_0, y_1, $\ldots$, $y_n \in \mathbb{F}$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi $\mathbb{F}$-kertoiminen polynomi P siten, että

$$\deg P \leq n \quad \text{ja} \quad P(x_j) = y_j, \quad \text{kun } 0 \leq j \leq n.$$

Kun tätä sovelletaan erityisesti äärelliseen kuntaan $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ (p alkuluku, tai Galois'n kuntaan $\mathbb{F}_q$, missä $q = p^d$, p alkuluku ja d positiivinen kokonaisluku), saadaan menetelmä, jota voidaan käyttää *salaisuuden jakamiseen.* Oletetaan, että alkio $a_0 \in \mathbb{F}$ pitäisi jakaa $n+1$ henkilölle niin, että kaikki yhdessä pystyvät suureen a_0 selvittämään, mutta mikään enintään n henkilön osajoukko ei (muuten kuin käymällä läpi kaikki kunnan $\mathbb{F}$ alkiot). Tämä voidaan tehdä seuraavasti: Valitaan satunnaisesti $n + 1$ keskenään erisuurta, nollasta eroavaa alkiota x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in \mathbb{F}$ ja satunnaiset a_1, $\ldots$, $a_n \in \mathbb{F}$. Asetetaan

$$P(x) := a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

ja $y_j := P(x_j)$, $0 \leq j \leq n$. Henkilölle j annetaan (x_j, y_j).

Kun kaikki tieto (x_j, y_j), $0 \leq j \leq n$, on käytettävissä, saadaan polynomi P selville Lagrangen interpolaatiopolynomina ja salattu suure $a_0 = P(0)$. Harjoitustehtäväksi jää selvittää, miksi yhdenkin tiedon (x_j, y_j) puuttuessa polynomia P ei saada selville. Täsmällisemmin tätä voidaan lähestyä seuraavasti: Oletetaan, että (x_j, y_j), $0 \leq j \leq n-1$, on käytettävissä, mutta (x_n, y_n) ei ole. Jokaiselle $c \in \mathbb{F}$ olkoon Q_c polynomi, jolle

$$\deg Q_c \leq n, \quad Q_c(x_j) = y_j, \quad \text{kun } 0 \leq j \leq n-1, \quad \text{ja} \quad Q_c(0) = c.$$

Tässä siis interpolaatiodatan viimeisen parin (x_n, y_n) tilalle on vaihdettu $(0, c)$. Etsittyä polynomia P vastaa tapaus $c = a_0$. Koska $n + 1$ pisteen data määrää polynomin P yksikäsitteisesti, on $P = Q_{a_0}$, ja eri arvoja $c \in \mathbb{F}$ vastaavat polynomit Q_c ovat eri polynomeja (onhan $Q_c(0) = c$). Näin konstruoituja polynomeja Q_c on siis täsmälleen yhtä monta kuin kunnassa $\mathbb{F}$ on alkioita. Kun kunnan $\mathbb{F}$ alkioiden lukumäärä on riittävän iso, on polynomin P määrääminen puutteellisen datan avulla kuin "neulan etsimistä heinäsuovasta".

Edellistä salaisuuden jakomentelmää on helppo muuntaa siten, että salaisuus $a_0 \in \mathbb{F}$ jaetaan $n+1$ henkilölle niin, että mikä tahansa $k+1$ henkilön ryhmä, $k \leq n$, pystyy suureen a_0 selvittämään, mutta mikään pienempi osajoukko ei.

2.2. Virheen arviointi. Interpolointia voidaan käyttää myös annetun funktion likiarvojen määräämiseen seuraavasti:[8] Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f\colon I \to \mathbb{R}$ annettu

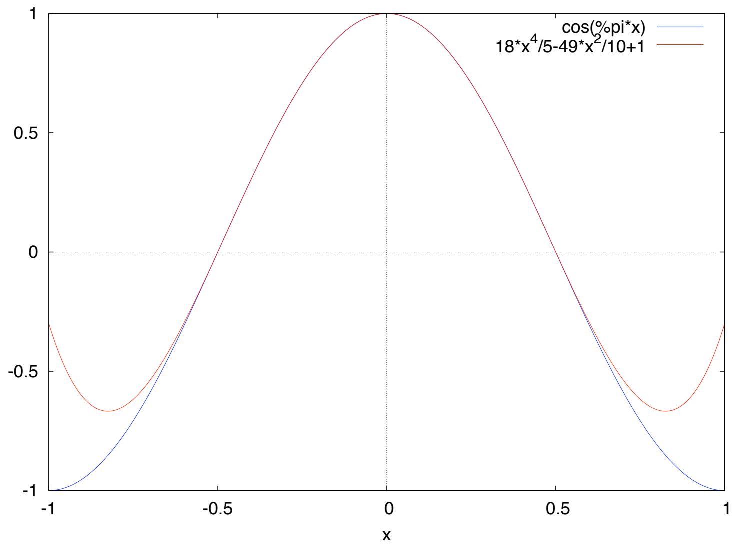
[8]Interpolointi on aikoinaan syntynyt tarpeesta laskea "hankalien funktioiden" arvoja taulukkoarvojen (vrt. [**1**]) väliin jäävissä pisteissä. Jos $\min\{x_0, x_1 \ldots, x_n\} < x < \max\{x_0, x_1 \ldots, x_n\}$, on $P(x)$ funktiolle f *interpoloitu arvo*, ja jos $x \notin [\min\{x_0, x_1 \ldots, x_n\}, \max\{x_0, x_1 \ldots, x_n\}]$, on $P(x)$ funktiolle f *extrapoloitu arvo.*

funktio. Olkoot x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in I$ keskenään erisuuria ja $y_j := f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$. Soveltamalla Lagrangen interpolaatiomenetelmää pisteisiin (x_j, y_j), $0 \leq j \leq n$, saadaan polynomi P, jolle $P(x_j) = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$. Kuinka suuri virhe tehdään, jos välillä I funktion f sijasta käytetään polynomia P, t.s. kuinka suuri on $f(x) - P(x)$?

Esimerkki 2.3. Olkoot $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(\pi x)$ ja $\{x_0, x_1, \ldots, x_4\} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$. Tällöin $\{y_0, y_1, \ldots, y_4\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\}$ ja

$$P(x) = \frac{18\,x^4}{5} - \frac{49\,x^2}{10} + 1$$

Seuraavasta kuvasta ilmenee, että erotus $f(x) - P(x)$ on pieni ainakin osalla väliä $[-1, 1]$:



Lause 2.4. *Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ väli, x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in I$ keskenään erisuuria ja $f\colon I \to \mathbb{R}$ C^{n+1}-funktio. Olkoon P pisteiden $(x_j, f(x_j))$, $0 \leq j \leq n$, määräämä Lagrangen interpolaatiopolynomi.*

Tällöin jokaiselle $x \in I$ on olemassa $\xi_x \in I$ siten, että[9]

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, L(x),$$

missä

$$L(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) = (x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Todistus. Jos x on jokin pisteistä x_j, häviävät väitetyn kaavan molemmat puolet.

Kiinnitetään piste x niin, että $x \neq x_j$ kaikille $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Asetetaan $F(t) := f(t) - P(t) - c\,L(t)$, missä luku c valitaan niin, että $F(x) = 0$, t.s.

$$c := \frac{f(x) - P(x)}{L(x)}.$$

[9] Piste ξ_x sijaitsee suppeimmalla pisteiden x, x_0, $x_1 \ldots$, x_n määräämällä välillä, t.s. $\min\{x, x_0, x_1 \ldots, x_n\} < \xi_x < \max\{x, x_0, x_1 \ldots, x_n\}$.

Interpolaatio-ominaisuuden nojalla kaikille $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on

$$F(x_j) = f(x_j) - P(x_j) - c\,L(x_j) = 0.$$

Soveltamalla Rollen lausetta pisteiden x, x_0, $x_1 \ldots$, x_n määräämiin $n+1$ osaväliin nähdään, että derivaatalla F' on nollakohta jokaiselle näistä osaväleistä, t.s. derivaatalla F' on ainakin $n+1$ eri nollakohtaa pisteiden x, x_0, $x_1 \ldots$, x_n määräämällä välillä. Toistamalla tämä päättely derivaatan F' nollakohtien määräämiin n osaväliin nähdään, että toisella derivaatalla F'' on ainakin n eri nollakohtaa. Induktiolla (jonka yksityiskohdat jätetään lukijan tehtäväksi) nähdään, että derivaatalla $F^{(n+1)}$ on ainakin yksi nollakohta pisteiden x, x_0, $x_1 \ldots$, x_n määräämällä välillä. Olkoon ξ_x jokin näistä nollakohdista. Lasketaan funktion F kertaluvun $n+1$ derivaatta tässä pisteessä. Koska P on polynomi, jonka aste on enintään n, on $P^{(n+1)}(t) = 0$. Polynomi L on astettta $n+1$ ja sen johtava termi on x^{n+1}, joten $L^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. Siis

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - P^{(n+1)}(\xi_x) - c\,L^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c\,(n+1)!.$$

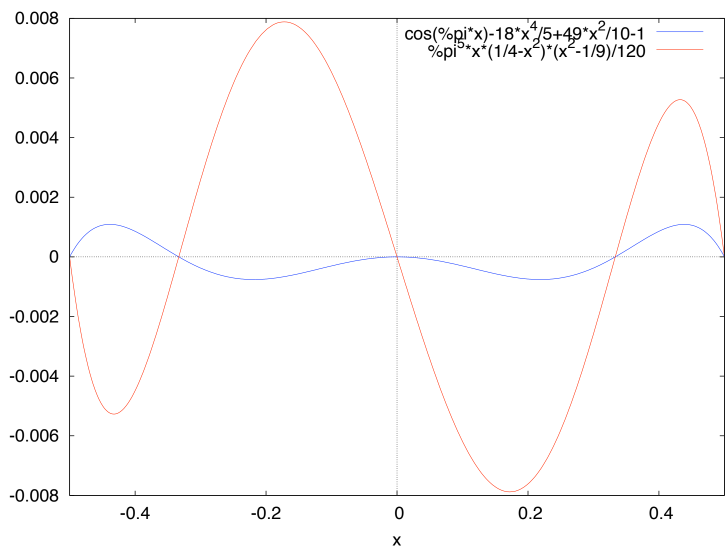
Kun tähän sijoitetaan vakion c arvo, saadaan

$$f(x) - P(x) = c\,L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,L(x). \qquad \square$$

Esimerkki 2.5. Jatketaan edellisen esimerkin tarkastelua. Funktion f kertaluvun $n+1 = 5$ derivaatta on $f^{(5)}(x) = -\pi^5 \sin(\pi\,x)$. Polynomi

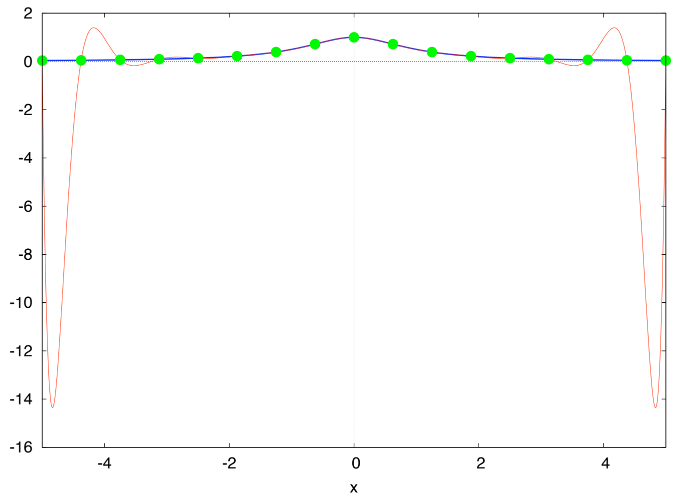
$$L(x) = (x + \tfrac{1}{2})\,(x + \tfrac{1}{3})\,x\,(x - \tfrac{1}{3})\,(x - \tfrac{1}{2}) = x\,(x^2 - \tfrac{1}{9})\,(x^2 - \tfrac{1}{4})$$

Virheelle $f(x) - P(x)$ saadaan siis yläraja $\frac{\pi^5}{5!}\,L(x)$. Seuraavaan kuvaan on piirretty virhe $f(x) - P(x)$ ja sen yläraja $\frac{\pi^5}{5!}\,L(x)$ välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:



2.3. Rungen ilmiö. Olkoot $f\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja P_n pisteiden $(x_j, f(x_j))$, $0 \le j \le n$, määräämä Lagrangen interpolaatiopolynomi ($I \subset \mathbb{R}$ väli, x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in I$ keskenään erisuuria).

Kun n on iso ja pisteet x_0, $x_1 \ldots$, $x_n \in I$ ovat "tiheässä", voisi jatkuvuuden nojalla olettaa, että polynomin P_n arvot ovat kaikkialla lähellä funktion f arvoja; pisteissä x_0, $x_1 \ldots$, x_n arvot ovat samat ja jatkuvuuden nojalla funktion f arvo pisteen x_j



KUVA 2.1. Rungen ilmiö funktiolle $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Kuvassa $n = 16$.

lähellä ei poikkea paljoa arvosta $f(x_j) = P_n(x_j)$. Näin ei kuitenkaan ole. Funktion differentioituus ei tässä auta lainkaan. Esimerkiksi funktiolle

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2},$$

välille $I := [-5, 5]$ ja pisteille $x_{n,j} := -5 + j\,\frac{10}{n}$, $0 \le j \le n$, on

$$\sup_{x \in I} |f(x) - P_n(x)| \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tämä interpoloinnin ei-approksimointiominaisuus tunnetaan *Rungen ilmiönä.*

Huomaa, että tässä f on C^∞-funktio[10] ja pisteet $x_{n,j}$, $0 \le j \le n$, ovat tasaväliset. Todistuksen osalta katso [**13**, luku 6, §3.4] tai [**5**, luvun IX liite].

2.4. Newtonin interpolaatiomenetelmä. Jos interpolointiin käytettyä pisteistöä $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ laajennetaan, joudutaan Lagrangen interpolaatiopolynomin määräämiseksi tarvittavat polynomit P_j ja L_j laskemaan täysin uudestaan. Newtonin interpolaatiomenetelmä ratkaisee saman interpolaatio-ongelman kuin Lagrangen interpolaatiopolynomi, mutta pisteistön laajentamisen suhteen Newtonin menetelmä on joustavampi.

Jos interpolaatiopisteitä on vain yksi, piste (x_0, y_0), interpolaatiopolynomi on vakiopolynomi $N_0(x) \equiv y_0$. Jos interpolaatiopisteitä on kaksi, pisteet (x_0, y_0) ja (x_1, y_1), interpolaatiopolynomi on muotoa $N_1(x) = y_0 + a_1\,(x - x_0)$. Pisteessä x_0 polynomin N_1 arvo on y_0, ja jotta $N_1(x_1) = y_1$, kertoimen a_1 on oltava $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$. Jos interpolaatiopisteistöön lisätään kolmas piste (x_2, y_2), interpolaatiopolynomi on muotoa $N_2(x) = y_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$. Pisteissä x_0 ja x_1 polynomi N_2 saa arvot y_0 ja y_1, ja jotta $N_2(x_2) = y_2$, kertoimen a_2 on oltava $(y_2 - y_0 - a_1\,(x_2 - x_0))/((x_1 - x_0)\,(x_2 - x_1))$.

[10] Itse asiassa f on vieläpä *reaalianalyyttinen*: sen Taylorin sarja minkä tahansa pisteen suhteen suppenee kohti funktiota f. Jälkimmäisessä viitteessä [**5**, luvun IX liite] Rungen ilmiötä tarkastellaan kompleksianalyysin apuvälinein.

Newtonin interpolaatiopolynomi pisteille (x_0, y_0),..., (x_n, y_n) on

$$\begin{aligned} N_n(x) &:= a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \dots \\ &\quad + a_n\,(x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kertoimet a_0, a_1, a_2,..., a_n määrätään seuraavan yhtälöryhmän mukaisesti:

$$\begin{cases} y_0 = a_0 \\ y_1 = a_0 + a_1\,(x_1 - x_0) \\ y_2 = a_0 + a_1\,(x_2 - x_0) + a_2\,(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1) \\ \ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1\,(x_n - x_0) + a_2\,(x_n - x_0)\,(x_n - x_1) + \dots \\ \qquad\quad + a_n\,(x_n - x_0)\,(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän lukemista helpottaa, sen n viimeistä riviä esitetään erotusosamäärinä

$$\begin{cases} \qquad y_0 = a_0 \\ \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a_1 \\ \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = a_1 + a_2\,(x_2 - x_1) \\ \qquad\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = a_1 + a_2\,(x_n - x_1) + \dots + a_n\,(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Yhtäpitävästi polynomin N_n määräävät ehdot $N_n(x_0) = y_0$ ja erotusosamääräpolynomi

$$\frac{N_n(x) - y_0}{x - x_0} = a_1 + a_2\,(x - x_1) + \dots + a_n\,(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) =: \tilde{N}_{n-1}(x),$$

t.s. $\tilde{N}_{n-1}$ on pisteisiin $(x_j, \frac{y_j - y_0}{x_j - x_0})$, $1 \le j \le n$, liittyvä Newtonin interpolaatiopolynomi. Tämä mahdollistaa Newtonin interpolaatiopolynomin määräämisen rekursiivisesti.

Jos pisteet (x_0, y_0),..., (x_n, y_n) ovat tasaväliset, $x_j = x_0 + j\,h$, voidaan yllä esitetty erotusosamääräkaavio täydentää seuraavasti: Merkitään

$$\Delta y_j := y_{j+1} - y_j, \Delta^2 y_j := \Delta y_{j+1} - \Delta y_j,\ \dots\ , \Delta^3 y_j := \Delta^2 y_{j+1} - \Delta^2 y_j, \quad \text{jne.}$$

Esitetään erotukset $\Delta^k y_j$ kaaviona

$$\begin{array}{cccc}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 \\
y_3 & & \Delta^2 y_2 & \\
\vdots & \Delta y_3 & & \\
y_{n-1} & & & \\
 & \Delta y_{n-1} & & \\
y_n & & &
\end{array}$$

Tällöin $a_j = \frac{1}{j!\,h^j}\,\Delta^j y_0$ (todistus induktiolla/HT).

Kun piste x esitetään muodossa $x = x_0 + h\,\xi$, vastaa väliä $x_0 \leq x \leq x_n$ väli $0 \leq \xi \leq n$, ja $x - x_j = h\,(\xi - j)$. Siis $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_j) = \xi(\xi-1)\ldots(\xi-j)\,h^{j+1}$. Newtonin interpolaatiopolynomi saa siis muodon

$$N_n(x) = N_n(x_0 + h\,\xi) = y_0 + \binom{\xi}{1}\,\Delta y_0 + \binom{\xi}{2}\,\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{\xi}{n}\,\Delta^n y_0.$$

Ks. [**4**, luku 5, §A.II], [**9**, luku 6, §2], [**10**, luku 1, §1]

Jos pisteet $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ eivät ole tasaväliset, erotusosamäärille käytettävät merkinnät vaihtelevat paljon. Jos kyse on funktion f arvojen $y_j = f(x_j)$ interpoloinnista, käytetään merkintöjä ([**9**, luku 6, §2])

$$f(x_j, x_{j+1}) = \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{x_j - x_{j+1}}, \quad f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f(x_j, x_{j+1}) - f(x_{j+1}, x_{j+2})}{x_j - x_{j+2}}, \quad \text{jne.}$$

tai ([**12**, §2.3])

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{x_j - x_{j+1}}, \quad f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}}, \quad \text{jne.}$$

Jos kyse on vain pisteistöstä $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, käytetään merkintöjä (joissa tosin x-arvot eivät näy lainkaan)

$$[y_j, y_{j+1}] = \frac{y_j - y_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, \quad [y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = \frac{[y_j, y_{j+1}] - [y_{j+1}, y_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}}, \quad \text{jne.}$$

2.5. Hermiten interpolaatiomenetelmä. [**9**, luku 6, §2]

Kun Lagrangen interpolaatiomenetelmässä määrätään *usean eri pisteen* kautta kulkeva polynomi, voidaan Taylorin polynomeja pitää *yhden pisteen* korkeamman kertaluvun "interpolaationa". Kurssilla Analyysi 3 [**A3**] Taylorin polynomeja tosin käsitellään enemmän approksimaatio-ominaisuuteensa nojaten, mutta ne voidaan määritellä seuraavastikin: Olkoon f välillä (a, b) n kertaa differentioituva funktio ja $x_0 \in (a, b)$. Funktion f n. Taylorin polynomi on enintään astetta n oleva polynomi T, jolle

$$D^k T(x_0) = D^k f(x_0), \quad \text{kun } 0 \leq k \leq n.$$

Hermiten interpolaatiopolynomi yhdistää Lagrangen interpolaatiopolynomin ja Taylorin polynomin ominaisuudet seuraavasti:

Olkoon annettuna $n+1$ eri pistettä $x_0, x_1 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ja jokaista pistettä x_j kohti olkoon annettuna luku $r_j \in \mathbb{Z}_+$ ja luvut $y_{j,d}$, $0 \le d \le r_j - 1$. On määrättävä polynomi H siten, että

$$D^d H(x_j) = y_{j,d}, \quad \text{kun } 0 \le d \le r_j - 1 \text{ ja } 0 \le j \le n. \tag{2.5}$$

Tällaisen polynomin H konstruoimiseksi mentellään vastaavalla tavalla kuin Lagrangen interpolaatiopolynomin kohdalla. Määrätään polynomit H_j siten, että

$$D^d H_j(x_j) = y_{j,d}, \quad \text{kun } 0 \le d \le r_j - 1, \text{ ja } \quad D^d H_j(x_k) = 0 \quad \text{kun } k \ne j.$$

Tällöin polynomilla $H := \sum_{j=0}^n H_j$ on vaaditut ominaisuudet.

Polynomit H_j määräämiseksi asetetaan

$$Q_j(x) := \prod_{k \ne j} (x - x_k)^{r_k}.$$

Olkoon

$$P_j(x) := a_{j,0} + a_{j,1}(x - x_j) + +a_{j,2}(x - x_j)^2 + \cdots + a_{j,r_j-1}(x - x_j)^{r_j - 1}.$$

Tässä kertoimet $a_{j,d}$ määrätään niin, että vaadittu derivaattaehto toteutuu polynomille $H_j := P_j\, Q_j$. Koska $Q_j(x_j) = \prod_{k \ne j}(x_j - x_k)^{r_k} \ne 0$ ja $P_j(x_j) = a_{j,0}$, kerroin $a_{j,0}$ määräytyy ehdosta

$$a_{j,0}\, Q_j(x_j) = y_{j,0}.$$

Oletetaan nyt, että kertoimet $a_{j,0}, \ldots, a_{j,d-1}$ on määrätty niin, että

$$D^c(P_j\, Q_j)(x_j) = y_{j,c}, \quad \text{kun } 0 \le c \le d - 1.$$

Koska $D^c P_j(x_j) = c!\, a_{j,c}$, saadaan tulon derivoimiskaavalla[11]

$$D^d(P_j\, Q_j)(x_j) = d!\, a_{j,d}\, Q_j(x_j) + \sum_{c=0}^{d-1} \binom{d}{c} D^c P_j(x_j)\, D^{d-c} Q_j(x_j).$$

Koska tässä $Q_j(x_j) \ne 0$ ja $D^c P_j(x_j) = c!\, a_{j,c}$, $0 \le c \le d - 1$, tunnetaan, voidaan kerroin $a_{j,d}$ määrätä niin, että $D^d(P_j\, Q_j)(x_j) = y_{j,d}$.

Edellisestä konstruktiosta käy ilmi, että polynomin H_j aste on enintään $r_j - 1 + \sum_{k \ne j} r_k = \sum_{k=0}^n r_k - 1$. Vastaavaan tapaan kuin Lagrangen interpolaatiopolynomin voidaan osoittaa, että jos Hermiten interpolaatiopolynomille asetetaan lisäehto

$$\deg H \le \sum_{k=0}^n r_k - 1,$$

niin ehdot (2.5) määräävät tällaisen polynomin yksikäsitteisesti.

LAUSE 2.6. *Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ väli, $x_0, x_1 \ldots, x_n \in I$ keskenään erisuuria. Jokaiselle $j \in \{0, \ldots, n\}$ olkoot $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $r; = \sum_{k=0}^n r_k - 1$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ C^{r+1}-funktio ja*

$$y_{j,d} := D^d f(x_j), \quad 0 \le d \le r_j - 1.$$

Olkoon H arvojen $(x_j, y_{j,d})$ määräämä Hermiten interpolaatiopolynomi.

[11] $D^d(f\,g)(x) = \sum_{c=0}^d \binom{d}{c} D^c f(x)\, D^{d-c} g(x)$.

Tällöin jokaiselle $x \in I$ on olemassa $\xi_x \in I$ siten, että

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(r+1)}(\xi_x)}{(r+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^{r_k}.$$

TODISTUKSEN osalta ks. [**9**, luku 6, §2].