LUKU 10

Yhdensuuntaissiirto

Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$ ja $v_p \in \mathbb{R}^3_p$ annettu vektori pisteessä p (vektorin v_p ei tarvitse olla pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektori). Tällöin vektori

$$(v_p \cdot \vec{N}(p))\, \vec{N}(p)$$

on vektorin v_p projektio normaalin $\vec{N}(p)$ suuntaan, ja vektori

$$\top_p v_p := v_p - (v_p \cdot \vec{N}(p))\, \vec{N}(p)$$

on vektorin v_p projektio tangenttiavaruuteen $T_p(\mathcal{M})$.

Olkoot $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-polku ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α, t.s. $\vec{V}$ on kuvaus $I \to \mathcal{M} \times \mathbb{R}^3$ siten, että

$$\vec{V}(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{M}) \quad \text{kaikille } t \in I.$$

Määritelmä 10.1. Tangenttivektorikentän $\vec{V}$ *kovariantti derivaatta* on

$$\mathbb{D}_t \vec{V} := \top_{\alpha(t)} \vec{V}'(t) = \vec{V}'(t) - (\vec{V}'(t) \cdot \vec{N}(\alpha(t)))\, \vec{N}(\alpha(t)),$$

missä $\vec{V}'(t) := (\alpha(t); V'(t))$, kun $\vec{V}(t) = (\alpha(t); V(t))$.

Huomautuksia 10.2. a) Koska $\mathbb{D}_t \vec{V}$ on derivaatan $\vec{V}'(t)$ ortogonaaliprojektio tangenttiavaruuteen $T_{\alpha(t)}(\mathcal{M})$, on myös $\mathbb{D}_t \vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α.

b) C^2-polun $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ tangenttivektori $\alpha'(t)$ on pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α. Tämän kovariantille derivaatalle on voimassa

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_t \alpha' = 0 &\iff \alpha''(t) = (\alpha''(t) \cdot \vec{N}(\alpha(t)))\, \vec{N}(\alpha(t)) \\ &\iff \alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(\mathcal{M}) \\ &\iff \alpha \text{ on geodeettinen polku.} \end{aligned}$$

c) Geometrisesti tulkittuna kovariantti derivaatta $\mathbb{D}_t \vec{V}$ ilmaisee vektorin $\vec{V}(t)$ muutosnopeuden *pinnalta* $\mathcal{M}$ *käsin nähtynä.*

Erityisesti, $\mathbb{D}_t \alpha'$ ilmaisee polun α nopeuden α' muutoksen pinnalta käsin nähtynä. Derivaattaa $\mathbb{D}_t \alpha'$ kutsutaan toisinaan *polun α kovariantiksi kiihtyvyydeksi.*

d) Jos $\vec{X}$ on pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä, voidaan sille määritellä kovariantti derivaatta tangenttivektorin $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ suuntaan asettamalla

$$\mathbb{D}_{v_p} \vec{X} := \top_p (D_{v_p} \vec{X}) = D_{v_p} \vec{X} - (D_{v_p} \vec{X} \cdot \vec{N}(p))\, \vec{N}(p).$$

[1]Viimeksi muutettu 24.3.2010.

Vektorikenttä $\vec{X} \circ \alpha$ on pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α, ja sen kovariantille derivaatalle on

$$\mathbb{D}_t(\vec{X} \circ \alpha) = \mathbb{D}_{\alpha'(t)}\vec{X}.$$

Tästä syystä kovariantti derivaattaa $\mathbb{D}_{v_p}\vec{X}$ ei juuri tarvita, koska se voidaan korvata siirtymällä pinnan polkuihin.

Lause 10.3. *Olkoot $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttiä pitkin polkua $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ ja $f\colon I \to \mathbb{R}$ C^1-funktio.*
Tällöin

(i) $\mathbb{D}_t(\vec{V} + \vec{W}) = \mathbb{D}_t\vec{V} + \mathbb{D}_t\vec{W}$;
(ii) $\mathbb{D}_t(f\,\vec{V}) = f'(t)\,\vec{V}(t) + f(t)\,\mathbb{D}_t\vec{V}$;
(iii) $\mathbb{D}_t(\vec{V} \cdot \vec{W}) = \mathbb{D}_t\vec{V} \cdot \vec{W}(t) + \vec{V}(t) \cdot \mathbb{D}_t\vec{W}$.

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

Olkoot p, $q \in \mathbb{R}^3$. Sanotaan, että *vektorit* $(p; v) \in \mathbb{R}^3_p$ *ja* $(q; w) \in \mathbb{R}^3_q$ *ovat euklidisesti yhdensuuntaiset*, jos $w = v$. Vastaavasti, *vektorikenttä* $\vec{V}\colon I \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *pitkin polkua* $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ *on euklidisesti yhdensuuntainen*, jos sen suuntaosa on vakio, $V(t) = V(t')$, kaikille t, $t' \in I$, kun $\vec{V}(t) = (\alpha(t); V(t))$.

Määritelmä 10.4. Olkoot $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-polku ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α.
Sanotaan, että *vektorikenttä $\vec{V}$ on (Levi-Civita-)yhdensuuntainen*, jos

$$\mathbb{D}_t\vec{V} = 0 \quad \text{kaikille } t \in I.$$

Siis tangenttivektorikenttä $\vec{V}$ on yhdensuuntainen, jos ja vain jos $\vec{V}$ "ei näytä muuttuvan pinnalta $\mathcal{M}$ käsin nähtynä".

Lause 10.5. *Olkoot $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttiä pitkin polkua $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$. Oletetaan, että $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ ovat yhdensuuntaisia.*
Tällöin

(i) *pituus $\|\vec{V}\|$ on vakio;*
(ii) *sisätulo $\vec{V} \cdot \vec{W}$ on vakio;*
(iii) *vektorikenttien $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ välinen kulma on vakio (kunhan $\vec{V}(t) \neq 0$ ja $\vec{W}(t) \neq 0$ kaikille $t \in I$);*
(iv) *summa $\vec{V} + \vec{W}$ on yhdensuuntainen;*
(v) *vektorikenttä $c\vec{V}$ on yhdensuuntainen kaikille $c \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

Lause 10.6. *Olkoot $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ C^1-polku, $t_0 \in I$ ja $v \in T_{\alpha(t_0)}(\mathcal{M})$.*
Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä $\vec{V}$ pitkin polkua α siten, että $\vec{V}$ on yhdensuuntainen ja $\vec{V}(t_0) = v$.

TODISTUS. Tangentivektorikentälle $\vec{V}$ on

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_t\vec{V} = 0 &\iff \vec{V}'(t) - (\vec{V}'(t)\cdot\vec{N}(\alpha(t)))\,\vec{N}(\alpha(t)) = 0\\ &\iff \vec{V}'(t) - \big(\vec{V}\cdot(\vec{N}\circ\alpha)'(t) - \vec{V}(t)\cdot(\vec{N}\circ\alpha)'(t)\big)\,\vec{N}(\alpha(t)) = 0\\ &\iff \vec{V}'(t) + \big(\vec{V}(t)\cdot(\vec{N}\circ\alpha)'(t)\big)\,\vec{N}(\alpha(t)) = 0.\end{aligned}$$

Siis $\vec{V}$ on yhdensuuntainen, jos ja vain jos $\vec{V}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\vec{V}'(t) + \big(\vec{V}(t)\cdot(\vec{N}\circ\alpha)'(t)\big)\,\vec{N}(\alpha(t)) = 0. \tag{10.1}$$

Koordinaateittain kirjoitettuna yhtälö saa muodon

$$V_j'(t) + \sum_{k=1}^{3} V_k(t)\,(N_k\circ\alpha)'(t)\,N_j(\alpha(t)) = 0, \quad 1 \le j \le 3.$$

Tällä differentiaaliyhtälöryhmällä on yksikäsitteinen alkuehdon $V(t_0) = v$ toteuttava ratkaisu. Koska yhtälö on lineaarinen tuntemattoman funktion V suhteen, on ratkaisu määritelty koko välillä I.

Osoitetaan, että saatu funktio V on pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä. Kun yhtälö (10.1) kerrotaan puolittain vektorilla $\vec{N}(\alpha(t))$, saadaan

$$\big(\vec{V}\cdot(\vec{N}\circ\alpha)\big)'(t) = \vec{V}'(t)\cdot\vec{N}(\alpha(t)) + \vec{V}(t)\cdot(\vec{N}\circ\alpha)'(t) = 0,$$

joten $\vec{V}\cdot(\vec{N}\circ\alpha)$ on vakio. Mutta $\vec{V}(t_0)\cdot(\vec{N}\circ\alpha)((t_0)) = v\cdot\vec{N}(p) = 0$, joten $\vec{V}\cdot(\vec{N}\circ\alpha) \equiv 0$. Siis $\vec{V}(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{M})$ kaikille $t \in I$. □

SEURAUS 10.7. *Olkoot $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$* geodeettinen *polku siten, että $\alpha'(t) \neq 0$ kaikille $t \in I$, ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α.*

Tällöin $\vec{V}$ on yhdensuuntainen, jos ja vain jos

(i) *pituus $\|\vec{V}\|$ on vakio, ja*
(ii) *vektoreiden $\vec{V}(t)$ ja $\alpha'(t)$ välinen kulma on vakio.*

TODISTUS. $\Rightarrow$: Lause 10.5, kohdat (i) ja (iii).

$\Leftarrow$: Olkoon δ vektoreiden $\vec{V}(t)$ ja $\alpha'(t)$ välinen kulma. Tällöin

$$\cos\delta = \frac{\vec{V}(t)\cdot\alpha'(t)}{\|\vec{V}(t)\|\,\|\alpha'(t)\|}.$$

Oletuksen mukaan δ on muuttujan t funktiona vakio. Samoin $t \mapsto \|\vec{V}(t)\| =: a$ on vakio. Geodeettiselle polun vauhti $t \mapsto \|\alpha'(t)\| =: b$ on vakio.

Olkoot $t_0 \in I$ ja $v \in T_{\alpha(t_0)}(\mathcal{M})$ yksikkövektori siten, että $v \perp \alpha'(t_0)$. Olkoon $\vec{W}$ lauseen 10.6 mukainen pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α siten, että $\vec{W}$ on yhdensuuntainen ja $\vec{W}(t_0) = v$. Tällöin $||\vec{W}(t)\| = 1$ ja $\vec{W}(t)\cdot\alpha'(t) = 0$ kaikille $t \in I$ (lause 10.5), joten $\{\vec{W}(t), \alpha'(t)\}$ on tangenttiavaruuden $T_{\alpha(t)}(\mathcal{M})$ ortogonaalinen kanta kaikille $t \in I$.

Siis, on olemassa jatkuvat funktiot f, $g\colon I \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\vec{V}(t) = f(t)\,\alpha'(t) + g(t)\,\vec{W}(t).$$

Nyt

$$\cos\delta = \frac{\vec{V}(t)\cdot\alpha'(t)}{\|\vec{V}(t)\|\,\|\alpha'(t)\|} = \frac{f(t)\,\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}{a\,b} = f(t)\,b/a$$

ja

$$\|\vec{V}(t)\|^2 = f(t)^2\,\|\alpha'(t)\|^2 + g(t)^2\,\|\vec{W}(t)\|^2 = f(t)^2\,b^2 + g(t)^2.$$

Näistä seuraa, että f on vakio, ja jatkuvuuden perusteella, että g on vakio.

Siis $\vec{V}$ on yhdensuuntaisten tangenttivektorikenttien α' ja $\vec{W}$ lineaarikombinaatio vakiokertoimin. Tällöin $\vec{V}$ on yhdensuuntainen. □

MÄÄRITELMÄ 10.8. Olkoot $(\mathcal{M},\vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\alpha\colon[a,b]\to\mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-polku sekä $p:=\alpha(a)$, $q:=\alpha(b)$.

Olkoon $v_p\in T_p(\mathcal{M})$. Asetetaan

$$\mathbb{P}_\alpha(v_p) := \vec{V}(b)\in T_q(\mathcal{M}),$$

missä $\vec{V}$ on pinnan $\mathcal{M}$ yhdensuuntainen tangenttivektorikenttä pitkin polkua α, jolle $\vec{V}(a)=v_p$. Kuvaus

$$\mathbb{P}_\alpha\colon T_p(\mathcal{M})\to T_q(\mathcal{M})$$

on pinnan $\mathcal{M}$ *yhdensuuntaissiirto pitkin polkua* α.

ESIMERKKI 10.9 (Yhdensuuntaissiirto pallolla pitkin pituuspiirejä). Pallokoordinaattien

$$\varphi\colon(-\pi,\pi)\times(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\to S^2,\qquad \varphi(\theta,t):=(\cos t\cos\theta,\cos t\sin\theta,\sin t),$$

avulla pallon S^2 θ. pituuspiiri on

$$\alpha_\theta(t):=\varphi(\theta,t)=(\cos t\cos\theta,\cos t\sin\theta,\sin t).$$

Olkoon $\delta\in\mathbb{R}$. Pallon pituuspiirin α_θ tangenttivektori on yhdensuuntainen pitkin pituuspiiriä α_θ. Koska vektorikenttä $V_{\theta,\delta}$,

$$V_{\theta,\delta}(t):=(\cos\delta)\alpha_\theta'(t)+(\sin\delta)J_{\alpha_\theta(t)}(\alpha_\theta'(t)),$$

muodostaa vakiokulman δ pituuspiirin α_θ kanssa ja sen pituus on vakio $=\|\alpha_\theta'(t)\|=1$, on $V_{\theta,\delta}$ yhdensuuntainen pitkin pituuspiiriä α_θ.

Koska

$$V_{\theta,\delta}(t)=\big(-\cos\theta\cos\delta\sin t+\sin\theta\sin\delta,-\cos\theta\sin\delta-\sin\theta\cos\delta\sin t,\cos\delta\cos t\big),$$

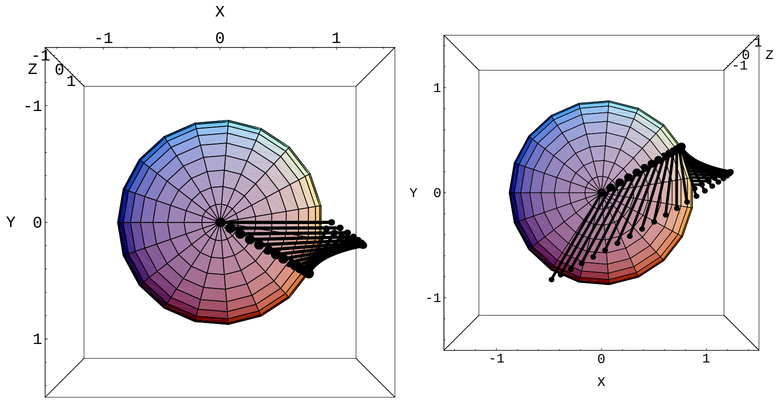
on etelänavalla

$$V_{\theta,\delta}(-\tfrac{\pi}{2})=(\cos(\theta-\delta),\sin(\theta-\delta),0)$$

ja pohjoisnavalla

$$V_{\theta,\delta}(\tfrac{\pi}{2})=(-\cos(\theta+\delta),-\sin(\theta+\delta),0)=(\cos(\theta+\delta+\pi),\sin(\theta+\delta+\pi),0).$$

Yhdensuuntaissiirto riippuu siis käytetystä polusta.



KUVA 1. Yhdensuuntaissiirto pallolla pitkin pituuspiirejä. Pallo ja vektorikenttä $V_{\theta,\delta}$ nähtynä etelänavalta (vasen kuva) ja pohjoisnavalta (oikea kuva). Kuvissa $\theta = \delta = \pi/6$. Huomaa, että y-akselin suunta on vastakkainen etelä- ja pohjoisnavalta nähtynä.

Ennenkuin selvitetään, miten vektorikentät muuttuvat, kun niitä siirretään yhdensuuntaisesti pitkin leveyspiirejä, tarkastellaan hieman yleisiä apuvälineitä.

Olkoot $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan polku ja $\vec{X}$ pinnan yksikkötangenttivektorikenttä pitkin polkua α.[2] Jokaiselle $p \in \mathcal{M}$ olkoon $J_p\colon T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M})$ kierto kulman $\frac{\pi}{2}$ verran, $J_p v_p = \vec{N}(p) \times v_p$. Tällöin $\mathbb{D}_t\vec{X} \perp \vec{X}(t)$ kaikille $t \in I$, joten on olemassa funktio $\omega = \omega_{\vec{X}}\colon I \to \mathbb{R}$ siten, että[3]

$$\mathbb{D}_t\vec{X} = \omega(t)\,(J\vec{X})(t),$$

missä $(J\vec{X})(t) := J_{\alpha(t)}\vec{X}(t)$.

Vastaavasti, $\mathbb{D}_t(J\vec{X}) \perp (J\vec{X})(t)$. Koska $\vec{X}(t)\cdot(J\vec{X})(t) = 1$ kaikille $t \in I$, on $(\mathbb{D}_t\vec{X})\cdot(J\vec{X})(t) + \vec{X}(t)\cdot\mathbb{D}_t(J\vec{X}) = 0$. Siis

$$\begin{cases} \mathbb{D}_t\vec{X} = \omega(t)\,(J\vec{X})(t), \\ \mathbb{D}_t(J\vec{X}) = -\omega(t)\,\vec{X}(t). \end{cases} \tag{10.2}$$

LEMMA 10.10. *Olkoot $\vec{Y}$ pinnan $\mathcal{M}$ yksikkötangenttivektorikenttä pitkin polkua α ja δ vektorikenttien $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$ välinen differentioituva kulmafunktio,*

$$\vec{Y}(t) = \cos\delta(t)\,\vec{X}(t) + \sin\delta(t)\,(J\vec{X})(t), \quad t \in I.$$

Tällöin

$$\mathbb{D}_t\vec{Y} = (\delta'(t) + \omega(t))\,(J\vec{Y})(t).$$

---

[2]Tälläinen vektorikenttä on helppo saada aikaiseksi ainakin jokaisessa karttaympäristössä $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$: jos $\vec{X}^\varphi := E_1^\varphi/\|E_1^\varphi\|$, niin $\vec{X} := (\vec{X}^\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \alpha$ käy.

[3]Jos tarkastellaan karttaympäristössä $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$ määriteltyä yksikkötangenttivektorikenttää $\vec{X}$, on sen kovariantille derivaatalle tangenttivektorin $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ suuntaan $\mathbb{D}_{v_p}\vec{X} = \vec{\omega}(v_p)\,(J\vec{X})(p)$, missä $\vec{\omega}\colon T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$. Vastaavasti saadaan $\mathbb{D}_{v_p}(J\vec{X}) = -\vec{\omega}(v_p)\,\vec{X}(p)$. Kuvaus $\vec{\omega}\colon T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja nimeltään *vektorikentän $\vec{X}$ määräämä konnektiomuoto.*

TODISTUS. Suoraan laskemalla (apuna lause 10.3, yhtälöt (10.2) ja $J^2 = -\mathbb{I}$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_t\vec{Y} &= -\delta'(t)\sin\delta(t)\,\vec{X}(t) + \cos\delta(t)\,\mathbb{D}_t\vec{X} \\
&\quad + \delta'(t)\cos\delta(t)\,(J\vec{X})(t) + \sin\delta(t)\,\mathbb{D}_t(J\vec{X}) \\
&= -\delta'(t)\sin\delta(t)\,\vec{X}(t) + \cos\delta(t)\,(\omega(t)\,(J\vec{X})(t)) \\
&\quad + \delta'(t)\cos\delta(t)\,(J\vec{X})(t) + \sin\delta(t)\,(-\omega(t)\,\vec{X}(t)) \\
&= (\delta'(t)+\omega(t))\,\big(-\sin\delta(t)\,\vec{X}(t) + \cos\delta(t)\,(J\vec{X})(t)\big) \\
&= (\delta'(t)+\omega(t))\,(J\vec{Y})(t).
\end{aligned}$$

□

SEURAUS 10.11. *Edellisen lemman oletuksin ja merkinnöin: Vektorikenttä $\vec{Y}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua α, jos ja vain jos*

$$\delta'(t) + \omega(t) = 0 \quad \textit{kaikille } t \in I.$$

SEURAUS 10.12. *Edellisen lemman oletuksin ja merkinnöin: Jos vektorikenttä $\vec{Y}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua α, niin parametrivälillä $a \le t \le b$ vektorikenttien $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$ välinen kulma muuttuu*

$$\delta(b) - \delta(a) = -\int_a^b \omega(t)\,dt.$$

Kovariantin derivaatan avulla yksikkövauhtisen polun α geodeettinen kaarevuus on

$$\varkappa_g(t) = (\mathbb{D}_t\alpha')\cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t).$$

Kun lemmaa 10.11 sovelletaan vektorikenttään $\vec{Y} = \alpha'$, saadaan

SEURAUS 10.13. *Lemman 10.11 oletuksin ja merkinnöin: Yksikkövauhtisen polun α geodeettinen kaarevuus on*

$$\varkappa_g(t) = \delta'(t) + \omega(t),$$

missä δ on vektorikenttien $\vec{X}$ ja α' välinen kulmafunktio.

SEURAUS 10.14. *Edellisen seurauksen oletuksin ja merkinnöin: Jos α on yksikkövauhtinen, niin parametrivälillä $a \le t \le b$ vektorikenttien $\vec{X}$ ja α' välinen kulma muuttuu*

$$\delta(b) - \delta(a) = \int_a^b \varkappa_g(t)\,dt - \int_a^b \omega(t)\,dt.$$

ESIMERKKI 10.15 (Yhdensuuntaissiirto pallolla pitkin leveyspiirejä). Pallokoordinaattien avulla t. leveyspiiri on

$$\beta_t(\theta) = (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, \sin t).$$

Leveyspiirin β_t vauhti $\|\beta_t'(\theta)\| = \cos t$ on vakio, joten sovelletaan lemmaa 10.10 vektorikenttään

$$\vec{X}(\theta) := \frac{1}{\cos t}\,\beta_t'(\theta) = (\beta_t(\theta); (-\sin\theta, \cos\theta, 0)).$$

Tälle vektorikentälle

$$\omega(\theta) = (\mathbb{D}_\theta\vec{X})\cdot(J\vec{X})(\theta) = \sin t.$$

Seurauksen 10.11 mukaan vektorikenttä $\vec{Y}$,

$$\vec{Y}(\theta) := \cos\delta(t)\,\vec{X}(\theta) + \sin\delta(t)\,(J\vec{X})(\theta),$$

on yhdensuuntainen pitkin leveyspiiriä β_t, kun sen ja leveyspiirin β_t välinen kulma δ valitaan niin, että $\delta'(\theta) = -\sin t$, t.s. $\delta = \delta(\theta) = -\theta\sin t$.

Nyt $(J\vec{X})(\theta) = (-\cos\theta\sin t, -\sin t\sin\theta, \cos t)$, joten

$$\begin{aligned}\vec{Y}(\theta) = \big(&-\cos(\theta\,\sin t)\,\sin\theta + \cos\theta\,\sin t\,\sin(\theta\,\sin t),\\ &\cos\theta\,\cos(\theta\,\sin t) + \sin t\,\sin\theta\,\sin(\theta\,\sin t),\\ &-\cos t\,\sin(\theta\,\sin t)\big),\end{aligned}$$

ja Greenwichin pituuspiirillä

$$\vec{Y}(0) = (0, 1, 0)$$

sekä uudestaan Greenwichin pituuspiirillä

$$\vec{Y}(2\pi) = (\sin t\sin(2\pi\sin t), \cos(2\pi\sin t), -\cos t\sin(2\pi\sin t)).$$

Yhden leveyspiirin kierroksen jälkeen leveyspiirin ja vektorin $\vec{Y}(\theta)$ välinen kulma on muuttunut kulman $-2\pi\sin t$ verran.

Edellä on tarkasteltu vain C^1-polkuja pitkin tapahtuvaa yhdensuunssiirtoa. Olkoot nyt p, $q \in \mathcal{M}$, ja $\alpha\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ paloittain C^1-polku, jolle $p := \alpha(a)$, $q := \alpha(b)$. Siis on olemassa välin $[a,b]$ jako $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$ siten, että $\alpha|_{[t_j,t_{j+1}]}$ on C^1-polku kaikille $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Yhdenssuuntaissiirto pitkin polkua α määritellään seuraavasti: Olkoon $v \in T_p(\mathcal{M})$. Asetetaan

$$\begin{aligned} v_1 &:= \mathbb{P}_{\alpha|_{[t_0,t_1]}}(v),\\ v_2 &:= \mathbb{P}_{\alpha|_{[t_1,t_2]}}(v_1),\\ v_{k+1} &:= \mathbb{P}_{\alpha|_{[t_k,t_{k+1}]}}(v_k),\end{aligned}$$

ja

$$\mathbb{P}_\alpha(v) := v_{k+1} \in T_q(\mathcal{M}).$$

Lause 10.16. *Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\alpha\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ paloittain C^1-polku pisteestä $p = \alpha(a)$ pisteeseen $q = \alpha(b)$.*

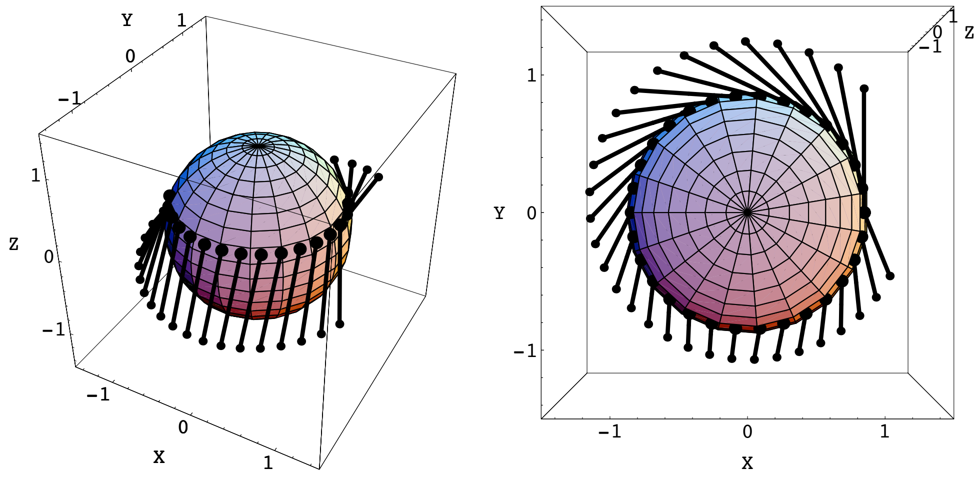
Olkoon $\mathbb{P}_\alpha\colon T_p(\mathcal{M}) \to T_q(\mathcal{M})$ yhdenssuuntaissiirto pitkin polkua α,

Tällöin

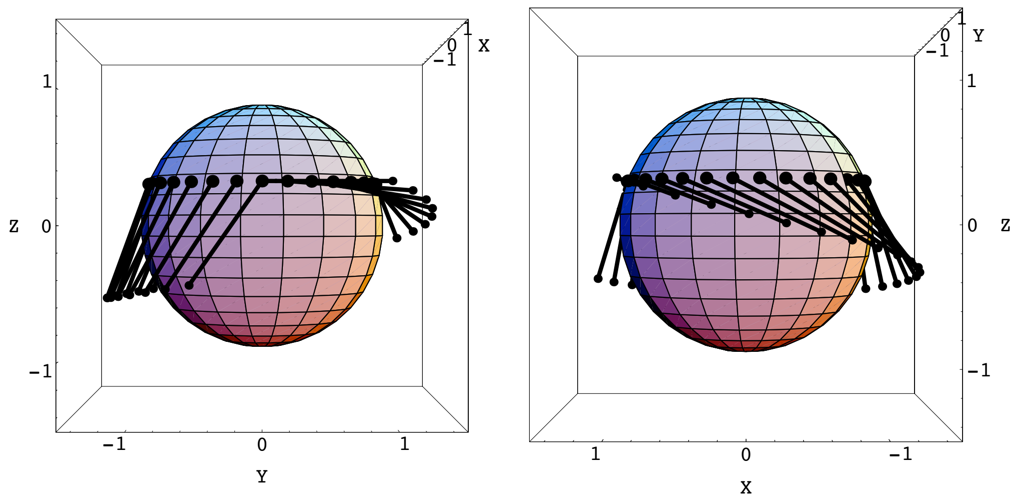
(i) $\mathbb{P}_\alpha$ *on lineaarikuvaus;*
(ii) $\mathbb{P}_\alpha$ *on bijektio; ja*
(iii) $\mathbb{P}_\alpha(v) \cdot \mathbb{P}_\alpha(w) = v \cdot w$ *kaikille v, $w \in T_p(\mathcal{M})$.*

Todistus. Kohta (i) seuraa helposti siitä, että jos $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ ovat yhdensuuntaisia pitkin polkua α, niin $\vec{V} + \vec{W}$ ja $c\vec{V}$, $c \in \mathbb{R}$, ovat yhdensuuntaisia.

Kohta (iii) seuraa siitä, että jos $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ ovat yhdensuuntaisia pitkin polkua α, niin $\vec{V} \cdot \vec{W}$ on vakio.



KUVA 2. Yhdensuuntaissiirto pallolla pitkin leveyspiirejä. Kuvissa $t = \pi/9$, jolloin leveyspiirin $\beta_t(\theta)$ ja vektorin $\vec{Y}(\theta)$ välinen kulma $\delta(\theta) = -\theta \sin t$ muuttuu arvosta $\delta = 0$ arvoon $\delta = -2\pi \sin(\pi/9) \approx -2.15$, kun leveyspiiri kierretään kerran ympäri. Oikeassa kuvassa pallo ja vektorikenttä $\vec{Y}$ nähtynä pohjoisnavalta.



KUVA 3. Pallo ja vektorikenttä $\vec{Y}$ nähtynä x-akselin suunnasta (vasen kuva; Greenwichin pituuspiiri keskellä) ja y-akselin suunnasta (oikea kuva; Greenwichin pituuspiiri vasemmalla).

Kohtaa (ii) varten todetaan, että jos $\mathbb{P}_\alpha(v) = 0$, niin $0 = \|\mathbb{P}_\alpha(v)\|^2 = \|v\|^2$ kohdan (iii) nojalla. Siis $v = 0$, joten $\mathbb{P}_\alpha$ on injektio. Mutta lineaarinen injektio $\mathbb{P}_\alpha \colon T_p(\mathcal{M}) \to T_q(\mathcal{M})$, missä $T_p(\mathcal{M})$ ja $T_q(\mathcal{M})$ ovat samanulotteisia vektoriavaruuksia, on dimensiolauseen nojalla myös surjektio. $\square$