LUKU 6

Weingartenin kuvaus

6.1. Vektorikentän derivaatta

Seuraavassa määritellään pinnalla määritellyn reaaliarvoisen funktion ja vektorikentän derivaatta. Nämä tulevat olemaan hyvinmääriteltyjä, kunhan "derivointisuunta" on pinnalle tangentiaalinen. Tätä varten kannattaa kerrata kurssilta Differentiaalilaskenta 1 [**4**, luku I], miten derivaatta ja differentioituvuus on määritelty euklidisen avaruuden *avoimessa osajoukossa* määritellylle funktiolle, ja miksi määrittelyssä pitää rajoittua nimenomaan avoimiin joukkoihin.

Kerrataan aluksi derivoinnin ketjusääntö sellaisessa muodossa, josta derivaatta on helppo yleistää pinnalla määritellylle funktiolle ja vektorikentälle. Olkoot $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ avoin, $p \in \mathcal{V}$, $(p; v) \in \mathbb{R}^3_p$ ja $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio.

Funktion f derivaatta pisteessä p vektorin v suuntaan on

$$Df(p)v = Df(\alpha(0))\alpha'(0) = (f \circ \alpha)'(0),$$

missä $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{V}$ on C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$.

Jos f on määritelty vain pinnalla $\mathcal{M}$, on derivaatta $(f \circ \alpha)'(0)$ edelleen hyvinmääritelty, kunhan polku α on pinnan $\mathcal{M}$ polku.

Määritelmä 6.1. Olkoot $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ sileä pinta, $p \in \mathcal{M}$, $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$, $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio ja $\vec{X}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^∞-vektorikenttä.

(i) *Funktion f derivaatta tangenttivektorin v_p suuntaan* on

$$D_{v_p} f := (f \circ \alpha)'(0),$$

missä $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ on C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$.

(ii) *Vektorikentän $\vec{X}$ derivaatta tangenttivektorin v_p suuntaan* on

$$D_{v_p} \vec{X} := (p; (X \circ \alpha)'(0)),$$

missä $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ on C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$, ja X on vektorikentän $\vec{X}$ suuntaosa, $\vec{X}(x) = (x; X(x))$, $x \in \mathcal{M}$.

Ennenkuin selvitellään tässä määritellyn derivaatan ominaisuuksia, ja ennen kaikkea osoitetaan, että määritelmä on hyvin asetettu, tarkastellaan kahta esimerkkiä, jotka osoittavat, miksi pinnalla määritellylle funktiolle tai vektorikentälle derivaatta voidaan määritellä vain pinnalle tangentiaaliseen suuntaan.

Esimerkki 6.2. Olkoon $\mathcal{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$. Tällöin $\mathcal{T}$ on funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z - 1$, määräämä sileä tasa-arvopinta, jolle normaalina on $\nabla F(x, y, z) = (0, 0, 1)$ ja tangenttiavaruus

$$T_p(\mathcal{T}) = \{(p; v) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3 \mid v = (v_1, v_2, 0)\}.$$

[1]Viimeksi muutettu 10.2.2010.

Olkoon $f\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $f(p) := 0$, kaikille $p \in \mathcal{T}$.

Jotta funktion f derivaatta voitaisiin määrätä muihinkin suuntiin kuin pinnalle tangentiaaliseen suuntiin, pitää funktion arvot tuntea jossakin pinnan ympäristössä. Olkoot g ja h funktion f seuraavat laajennukset koko avaruuteen:

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \quad g(p) := 0, \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) := z - 1. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p \in \mathcal{T}$ ja $\alpha'(0) = v$. Tässä vektorin $(p;v)$ ei tarvitse olla pinnan $\mathcal{T}$ tangenttivektori.

Nyt $g(\alpha(t)) = 0$ kaikille $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, joten $(g \circ \alpha)'(0) = 0$.

Toisaalta, $h(\alpha(t)) = \alpha_3(t) - 1$, kun $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, joten $(h \circ \alpha)'(0) = \alpha_3'(0) = v_3$. Jos polku α valitaan siten, että $\alpha_3(t) = t$ kaikille $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, on $(h\circ\alpha)'(0) = v_3 = 1$, ja siis $(g\circ\alpha)'(0) \neq (h\circ\alpha)'(0)$. Siis, jos $(p;v)$ ei ole pinnan $\mathcal{T}$ tangenttivektori, derivaatta riippuu siis laajenuksen valinnasta. Jos taas $(p;v)$ on pinnan $\mathcal{T}$ tangenttivektori, on $v_3 = 0$ ja $(h \circ \alpha)'(0) = v_3 = 0 = (g \circ \alpha)'(0)$.

Esimerkki 6.3. Olkoot $r > 0$ ja $\mathcal{M} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ sekä $\vec{X}$ pinnan $\mathcal{M}$ vektorikenttä, jonka suuntaosalle X on $X(p) := \frac{1}{r}\,p$.

Olkoot $\vec{Y}$ ja $\vec{Z}$ vektorikentän $\vec{X}$ seuraavat laajennukset (vain suuntaosa on annettu):

$$\begin{aligned} Y\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \quad Y(p) := \frac{1}{r}\,p, \quad \text{ja} \\ Z\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^3, \quad Z(p) := \frac{1}{\|p\|}\,p. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$. Tässä vektorin $(p;v)$ ei tarvitse olla pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektori.

Nyt $Y(\alpha(t)) = \frac{1}{r}\,\alpha(t)$ kaikille $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, joten $(Y \circ \alpha)'(0) = \frac{1}{r}\,\alpha'(0) = \frac{1}{r}\,v$.

Toisaalta, $Z(\alpha(t)) = \frac{1}{\|\alpha(t)\|}\,\alpha(t)$, joten

$$\begin{aligned} (Z \circ \alpha)'(0) &= \frac{1}{\|\alpha(0)\|}\,\alpha'(0) + \Big(\frac{d}{dt}\frac{1}{\|\alpha(t)\|}\Big)\Big|_{t=0}\alpha(0) = \frac{1}{\|p\|}\,v - \Big(\frac{\alpha(0)\cdot\alpha'(0)}{\|\alpha(0)\|^3}\Big)\,p \\ &= \frac{1}{r}\,v - \frac{p\cdot v}{r^3}\,p. \end{aligned}$$

Nyt $(Y\circ\alpha)'(0) = (Z\circ\alpha)'(0)$, jos ja vain jos $\frac{p\cdot v}{r^3}\,p = 0$, eli $p\cdot v = 0$, tai yhtäpitävästi $v_p \in T_p(\mathcal{M})$.

Huomautuksia 6.4. a) Olkoot $\vec{X}$ pinnan $\mathcal{M}$ vektorikenttä ja $\vec{Y}$ avoimessa joukossa joukossa $\mathcal{V} \supset \mathcal{M}$ määritelty vektorikenttä, jolle $\vec{Y}(p) = \vec{X}(p)$ kaikille $p \in \mathcal{M}$.

Olkoot $p \in \mathcal{M}$, $v_p = (p;v) \in T_p(\mathcal{M})$ ja $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{M}$ C^∞-polku siten, että $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$. Tällöin suuntaosille on ketjusäännön nojalla

$$(X \circ \alpha)'(0) = (Y \circ \alpha)'(0) = DY(\alpha(0))\alpha'(0) = DY(p)v.$$

Siis, derivaatta $D_{v_p}\vec{X}$ ei riipu valitusta polusta α, jolle $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$, ainoastaan pisteestä p ja suunnasta v.

b) Derivaatta $D_{v_p}\vec{X}$ ei myöskään riipu siitä, miten a-kohdan laajennus $\vec{Y}$ valitaan. Nimittäin, jos $\vec{Z}$ on avoimessa joukossa joukossa $\mathcal{V}' \supset \mathcal{M}$ määritelty vektorikenttä, jolle $\vec{Z}(p) = \vec{X}(p)$ kaikille $p \in \mathcal{M}$, on $(Z \circ \alpha)(t) = (Y \circ \alpha)(t)$ kaikille $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, joten

$$(Z \circ \alpha)'(0) = (Y \circ \alpha)'(0).$$

c) Kohdan a) lasku antaa menetelmän derivaatan $D_{v_p}\vec{X}$ määräämiseen ilman, että tarvitsee määrätä polku α, jolle $\alpha(0) = p$ ja $\alpha'(0) = v$.

c) Kohtien a) ja b) väitteet pätevät myös reaaliarvoisen funktion f derivaatalla (sopivasti modifioituina). Erityisesti, derivaatalle on

$$D_{v_p} f = (f \circ \alpha)'(0) = Dg(p)v,$$

kun g on avoimessa joukossa joukossa $\mathcal{V} \supset \mathcal{M}$ määritelty funktio, jolle $g(p) = f(p)$ kaikille $p \in \mathcal{M}$, ja $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$.

6.1.1. Funktioiden ja vektorikenttien derivointia koskevat tutut derivointikaavat, joiden todistaminen jätetään lukijan tehtäväksi ($f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ on pinnalla $\mathcal{M}$ määritelty C^∞-funktio, $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$ ovat pinnan $\mathcal{M}$ C^∞-vektorikenttiä ja $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$):

(i) $D_{v_p}(\vec{X} + \vec{Y}) = D_{v_p}\vec{X} + D_{v_p}\vec{Y}$;

(ii) $D_{v_p}(f\,\vec{Y}) = (D_{v_p} f)\,\vec{X}(p) + f(p)\,(D_{v_p}\vec{Y})$;

(iii) $D_{v_p}(\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (D_{v_p}\vec{X}) \cdot \vec{Y}(p) + \vec{X}(p) \cdot D_{v_p}\vec{Y}$.

6.1.2. Funktion f tai vektorikentän $\vec{X}$ derivaatan määräämiseksi kannattaa huomata seuraava käytännöllinen yhteys lokaaleihin parametriesityksiin:

Olkoot $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ sileä pinta, $p \in \mathcal{M}$, $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ lokaali parametriesitys ja $u_0 \in \mathcal{U}$ siten, että $\varphi(u_0) = p$. Olkoot edelleen $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio ja $\vec{X}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^∞-vektorikenttä. Tällöin derivaatat koordinaattikäyrien tangenttivektorien

$$E_1^\varphi(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_0) \quad \text{ja} \quad E_2^\varphi(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u_0),$$

suuntiin ovat

$$D_{E_1^\varphi(u_0)} f = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_1}(u_0), \qquad D_{E_2^\varphi(u_0)} f = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_2}(u_0),$$

$$D_{E_1^\varphi(u_0)}\vec{X} = \Big(p; \frac{\partial (X \circ \varphi)}{\partial u_1}(u_0)\Big), \qquad D_{E_2^\varphi(u_0)}\vec{X} = \Big(p; \frac{\partial (X \circ \varphi)}{\partial u_2}(u_0)\Big).$$

Näidenkin kaavojen toteaminen jätetään lukijan tehtäväksi. Kannattaa muistaa, että $E_1^\varphi(u_0)$ on polun $t \mapsto \varphi(u_0 + t\,e_1)$ ja $E_2^\varphi(u_0)$ vastaavasti polun $t \mapsto \varphi(u_0 + t\,e_2)$ tangenttivektori hetkellä $t = 0$. Tässä $e_1 := (1, 0)$ ja $e_2 := (0, 1)$.

6.2. Weingartenin kuvaus

Yksikkövauhtisen polun α kaarevuus on helppo ymmärtää tangenttivektorin α' muutosnopeuteen α'' liittyväksi ominaisuudeksi. Kaksiulotteiselle pinnalle $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ vastaava ajattelutapa ei ole helppoa toteuttaa. Ensinnäkin, jos $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ on pinnan $\mathcal{M}$ lokaali parametriesitys, on tangenttivektoreita nyt kaksi, eli nyt pitäisi selvittää kaksiulotteisen tangenttiavaruuden muuttumisnopeutta. Toisekseen, lokaalia parametriesitystä ei välttämättä voida "korjata" sellaiseksi, että koordinaattikäyrät olisivat yksikkövauhtisia. Helpompi lähestymistapa saadaan tutkimalla pinnan yksikkönormaalia. Tasokäyristä kannattaa palauttaa mieleen seuraava Frenet'n kaavojen antama kaava: kun $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ on yksikkövauhtinen polku, on

$$N' = -\varkappa T,$$

missä $T := \alpha'$, $N := J\alpha'$ ja $\varkappa$ on polun α merkkinen kaarevuus.

Määritelmä 6.5. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$ ja $v_p \in T_p(\mathcal{M})$. *Pinnan* $\mathcal{M}$ *Weingartenin kuvaus* S_p *pisteessä* p määritellään kaavalla[2]

$$S_p(v_p) := -D_{v_p}\vec{N}.$$

Huomautuksen 6.4 kohdasta a) saadaan kaava Weingartenin kuvauksen arvojen laskemiseen: Jos $\mathcal{V}$ on avoin, pinnan $\mathcal{M}$ sisältävä joukko ja $\tilde{N}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ C^∞-kuvaus, jolle $\tilde{N}|_{\mathcal{M}} = N$, sekä $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$, niin

$$S_p(v_p) = -(p; D\tilde{N}(p)v).$$

Tästä seuraa erityisesti, että Weingartenin kuvaus S_p on lineaarikuvaus $T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^3_p$. Kuvavektoreista $S_p(v_p)$ voidaan sanoa hieman enemmänkin:

Koska $\vec{N}$ on yksikkövektori, on $\vec{N}(p) \cdot \vec{N}(p) = 1$ kaikille $p \in \mathcal{M}$, joten (ks. 6.1.1.iii)

$$0 = D_{v_p}1 = 2(D_{v_p}\vec{N}) \cdot \vec{N}(p).$$

Siis $D_{v_p}\vec{N} \perp \vec{N}(p)$, joten $D_{v_p}\vec{N} \in T_p(\mathcal{M})$, eli Weingartenin kuvaus S_p on lineaarikuvaus

$$S_p\colon T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M}).$$

Weingartenin kuvauksen arvojen $S_p(v_p)$ laskemista helpottavat seuraavat kaavat: Olkoot $p \in \mathcal{M}$, $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ lokaali parametriesitys ja $u_0 \in \mathcal{U}$ siten, että $\varphi(u_0) = p$. Tällöin kohdan 6.1.2 kaavojen nojalla

$$\begin{aligned} S_p(E_1^\varphi(u_0)) &= -\Big(p; \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_1}(u_0)\Big), \\ S_p(E_2^\varphi(u_0)) &= -\Big(p; \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_2}(u_0)\Big). \end{aligned}$$

Koska vektorit $E_1^\varphi(u_0)$ ja $E_2^\varphi(u_0)$ virittävät tangenttiavaruuden $T_p(\mathcal{M})$, saadaan Weingartenin kuvauksen arvot $S_p(v_p)$ lasketuksi y.o. derivaattojen avulla kaikille tangenttivektoreille $v_p \in T_p(\mathcal{M})$. Kannattaa lisäksi muistaa, että $(N \circ \varphi)(u) = \pm N^\varphi(u)$, missä N^φ on tilkun φ yksikkönormaali, joka puolestaan on helppo laskea koordinaattikäyrien tangenttivektorien ristitulon avulla.

Lause 6.6. *Olkoot* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *suunnistettu pinta ja* $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ C^2*-polku. Tällöin pinnan* $\mathcal{M}$ *Weingartenin kuvaukselle* S *on voimassa*

$$\alpha''(t) \cdot N(\alpha(t)) = S_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \textit{kaikille } t \in I.$$

[2]Weingartenin kuvauksesta käytetään myös nimitystä *muoto-operaattori*, varsinkin englannin kielisenä versiona *shape operator*. Kuten myöhemmin nähdään, Weingartenin kuvaus mittaa pinnan kaareutumista vastaavaan tapaan kuin tasokäyrän kaarevuus.

TODISTUS. Derivoidaan identiteetti

$$\alpha'(t) \cdot N(\alpha(t)) = 0$$

puolittain muuttujan t suhteen. Saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha''(t) \cdot N(\alpha(t)) + \alpha'(t) \cdot (N \circ \alpha)'(t) \\ &= \alpha''(t) \cdot N(\alpha(t)) + \alpha'(t) \cdot D_{(\alpha(t);\alpha'(t))} \vec{N} \\ &= \alpha''(t) \cdot N(\alpha(t)) - \alpha'(t) \cdot S_{\alpha(t)}(\alpha'(t)). \end{aligned}$$ □

Lauseen identitetti on erään tasokäyrille tutun kaavan yleistys: kun $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ on sileä polku, on

$$\varkappa(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J(\alpha'(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\alpha''(t) \cdot N(t)}{\|\alpha'(t)\|^2},$$

kun $N := J\alpha'/\|\alpha'\|$. Tasokäyrille lausekkeen $S_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t)$ tilalla siis on $\varkappa(t)\, \|\alpha'(t)\|^2$. Tämä antaa aiheen seuraavaan määritelmään:

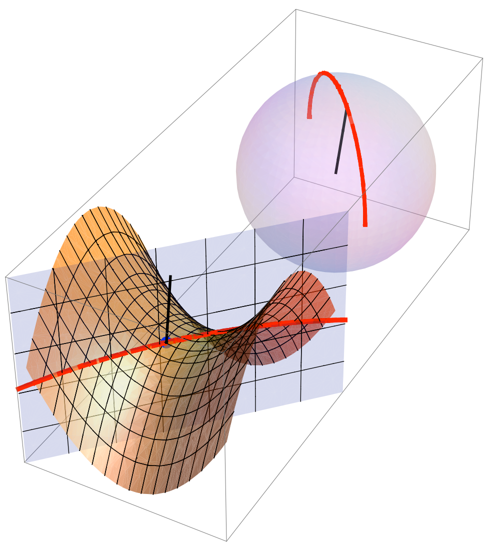
MÄÄRITELMÄ 6.7. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, $u_p \in T_p(\mathcal{M})$ yksikkövektori (siis $\|u_p\| = 1$) ja S_p pinnan $\mathcal{M}$ Weingartenin kuvaus pisteessä p.

Pinnan $\mathcal{M}$ normaalikaarevuus tangenttivektorin u_p suuntaan on

$$k(u_p) := S_p(u_p) \cdot u_p.$$

Kaikille $v_p \in T_p(\mathcal{M})$, $v_p \neq 0_p$, asetetaan

$$k(v_p) := \frac{S_p(v_p) \cdot v_p}{\|v_p\|^2}.$$



KUVA 1. Voidaan osoittaa, että pinnan $\mathcal{M}$ normaalikaarevuus tangenttivektorin v_p suuntaan on pinnan normaalin $\vec{N}(p)$ ja tangenttivektorin v_p määräämän tason $\{p + s\,v + t\,N(p) \mid s,\ t \in \mathbb{R}\}$ ja pinnan $\mathcal{M}$ leikkauskäyrän merkkinen kaarevuus. Kuvassa myös leikkauskäyrän C kuvajoukko $N(C)$ pinnan Gaussin kuvauksessa.

Edellisen lauseen tulos antaa seuraavan, tasokäyrien kaarevuuden merkin merkityksen yleistävän tulkinnan: Jos pinta $\mathcal{M}$ tangenttivektorin v_p suuntaan liikuttaessa taipuu normaalivektoria $\vec{N}(p)$ kohti, on normaalikaarevuus $k(v_p) \geq 0$. Vastaavasti, jos pinta $\mathcal{M}$ tangenttivektorin v_p suuntaan liikuttaessa taipuu normaalivektorista $\vec{N}(p)$ poispäin, on normaalikaarevuus $k(v_p) \leq 0$.

Esimerkki 6.8 (Pallo). Olkoot $r > 0$, $\mathcal{M} := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r\}$ ja $N(p) := \frac{1}{r}\,p$ (vrt. esimerkkiin 6.3). Tällöin

$$D_{v_p}\vec{N} = \Big(p; \frac{1}{r}\,v\Big).$$

Pallon Weingartenin kuvaus pisteeessä $p \in \mathcal{M}$ on siis

$$S_p(v_p) = -\Big(p; \frac{1}{r}\,v\Big) = -\frac{1}{r}\,v_p$$

Tarkastellaan *ominaisarvoyhtälöä*

$$S_p(v_p) = \lambda\, v_p.$$

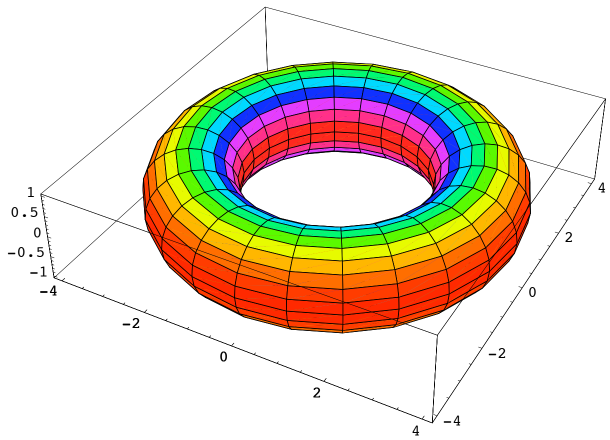
Selvästi tämä yhtälö toteutuu kaikille tangenttivektoreille v_p, kun $\lambda = -\frac{1}{r}$. Jos taas $\lambda \neq -\frac{1}{r}$, yhtälö toteutuu ainoastaan vektorille $v_p = 0_p$.

Pallon Weingartenin kuvauksen S_p ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r}$. Näitä vastaaviksi ominaisvektoreiksi kelpaavat mitkä tahansa nollasta eroavat tangenttivektorit.

Esimerkki 6.9 (Torus). Olkoot $0 < b < a$ ja $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(u, v) := ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v).$$

Tällöin φ on sileä tilkku, jonka kuvajoukko $\mathcal{M} := \varphi(\mathbb{R}^2)$ on sileä pinta, *torus*.[3]



Kuva 2. Torus väritettynä ominaisarvon λ_1 avulla.

[3]Tarkasteltava torus on esitettävissä myös sileänä tasa-arvopintana $\big(\sqrt{x^2+y^2} - a\big)^2 + z^2 = b^2$, joten torus on suunnistuva.

Toruksen koordinaattivektorikentät ovat

$$\begin{aligned} E_1^\varphi(u,v) &= (a + b\cos v)\,(-\sin u, \cos u, 0),\\ E_2^\varphi(u,v) &= b\,(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v), \end{aligned}$$

joten tilkulla φ on normaalivektori

$$E_1^\varphi(u,v) \times E_2^\varphi(u,v) = b\,(a + b\cos v)\,(\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v)$$

ja yksikkönormaali

$$N^\varphi(u,v) = (\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v).$$

Määritelmän 6.5 jälkeen esitettyjen kaavojen nojalla Weingartenin kuvauksen arvot koordinaattivektorikenttien suuntiin saadaan osittaisderivaattoina

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N^\varphi}{\partial u}(u,v) &= (\cos v\sin u, -\cos v\cos u, 0) \quad \text{ja}\\ -\frac{\partial N^\varphi}{\partial v}(u,v) &= (\sin v\cos u, \sin v\sin u, -\cos v). \end{aligned}$$

Koska

$$-\frac{\partial N^\varphi}{\partial u}(u,v) = -\frac{\cos v}{a + b\cos v}\,E_1^\varphi(u,v) \quad \text{ja} \quad -\frac{\partial N^\varphi}{\partial v}(u,v) = -\frac{1}{b}\,E_2^\varphi(u,v),$$

on toruksen Weingartenin kuvauksella S_p ominaisarvoina pisteessä $p = \varphi(u,v)$

$$\lambda_1 = -\frac{\cos v}{a + b\cos v} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{b}.$$

Näitä vastaavat ominaisvektorit ovat koordinaattivektorikentät $E_1^\varphi(u,v)$ ja $E_2^\varphi(u,v)$.

6.2.1. Kahden edellisen esimerkin kaltainen ominaisuus, että suunnistetun pinnan Weingartenin kuvauksella on reaaliset ominaisarvot, on kaikilla suunnistetuilla pinnoilla. Tämä perustuu seuraavaan Weingartenin kuvauksen tärkeään symmetriaominaisuuteen:

Lause 6.10. *Suunnistetun pinnan* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *Weingartenin kuvaus* S_p *on symmetrinen jokaisessa pisteessä* $p \in \mathcal{M}$*, t.s.*

$$S_p(v_p) \cdot w_p = v_p \cdot S_p(w_p) \quad \textit{kaikille } v_p,\ w_p \in T_p(\mathcal{M}). \tag{6.1}$$

Todistus. Olkoon $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ lokaali parametriesitys pisteen p ympäristössä siten, että sen yksikkönormaali N^φ ja pinnan $\vec{N}$ ovat samansuuntaiset, t.s. $N(\varphi(u)) = N^\varphi(u)$ kaikille $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$.

Määritelmän 6.5 jälkeen esitettyjen kaavojen nojalla Weingartenin kuvauksen arvot koordinaattivektorikenttien suuntiin saadaan osittaisderivaattoina

$$\begin{aligned} S_{\varphi(u)}(E_1^\varphi(u)) &= -\Big(\varphi(u); \frac{\partial N^\varphi}{\partial u_1}(u)\Big),\\ S_{\varphi(u)}(E_2^\varphi(u)) &= -\Big(\varphi(u); \frac{\partial N^\varphi}{\partial u_2}(u)\Big). \end{aligned}$$

Derivoidaan identiteetti

$$N^\varphi(u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = 0$$

muuttujan u_2 suhteen. Saadaan

$$0 = \frac{\partial N^\varphi}{\partial u_2}(u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) + N^\varphi(u) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2\, \partial u_1}(u)$$
$$= -S_{\varphi(u)}(E_2^\varphi(u)) \cdot E_1^\varphi(u) + N^\varphi(u) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2\, \partial u_1}(u).$$

Siis

$$S_{\varphi(u)}(E_2^\varphi(u)) \cdot E_1^\varphi(u) = N^\varphi(u) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2\, \partial u_1}(u).$$

Vaihtamalla muuttujien u_1 ja u_2 roolit, saadaan

$$S_{\varphi(u)}(E_1^\varphi(u)) \cdot E_2^\varphi(u) = N^\varphi(u) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1\, \partial u_2}(u).$$

Koska toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat riippumattomia derivointijärjestyksestä (ks. [**4**, H. A. Schwarzin lause 7.3]), on $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2\, \partial u_1}(u) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1\, \partial u_2}(u)$, joten

$$S_{\varphi(u)}(E_2^\varphi(u)) \cdot E_1^\varphi(u) = S_{\varphi(u)}(E_1^\varphi(u)) \cdot E_2^\varphi(u).$$

Koska vektorit $E_1^\varphi(u)$ ja $E_2^\varphi(u)$ muodostavat tangenttiavaruudelle $T_{\varphi(u)}(\mathcal{M})$ kannan, seuraa väite lineaarisuusperiaatteesta: bilineaarimuodon $(v_p, w_p) \mapsto S_p(v_p) \cdot w_p$ arvot määräytyvät täysin kantavektoreilla saamistaan arvoista. Yksityiskohtien läpikäyminen jätetään lukijan tehtäväksi. (Esitä mielivaltaiset tangenttivektorit v_p, $w_p \in T_p(\mathcal{M})$ kantavektoreiden $E_1^\varphi(u)$ ja $E_2^\varphi(u)$ lineaarikombinaatioina, ja laske kaavan (6.1) molemmat puolet auki käyttäen kantavektoreille saatua tulosta apuna.) $\square$

Weingartenin kuvauksen symmetrisyys takaa sen, että jokaisen suunnistetun pinnan Weingartenin kuvauksella S_p on (reaaliset) ominaisarvot (ja vastaavat reaaliset ominaisvektorit). Ominaisarvoilla on selkeä geometrinen merkitys: Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ Weingartenin kuvauksen S_p ominaisarvo ja $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin on siis

$$S_p(v_p) = \lambda\, v_p,$$

joten

$$S_p(v_p) \cdot v_p = \lambda\, v_p \cdot v_p = \lambda\, \|v_p\|^2.$$

Jos erityisesti v_p on yksikkövektori, on

$$\lambda = S_p(v_p) \cdot v_p = k(v_p)$$

pinnan normaalikaarevuus tangenttivektorin v_p suuntaan.

6.2.2. Palautetaan mieleen eräitä tärkeitä tuloksia lineaarikuvauksen ominaisarvoista ja -vektoreista.[4]

Olkoot $V := T_p(\mathcal{M})$ ja $L := S_p\colon T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M})$, jolloin V on kaksiulotteinen vektoriavaruus ja L symmetrinen lineaarikuvaus $V \to V$. Lineaarikuvauksen L ominaisuuksien tarkastelemiseksi sen matriisin avulla menetellään seuraavasti:

1° Valitaan avaruudelle V jokin kanta.

[4]Vaikka tässä Weingartenin kuvaus S_p on kaksiulotteisen vektoriavaruuden $T_p(\mathcal{M})$ lineaarikuvaus itselleen, ei aliavaruutta $T_p(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^3_p$ kannata samaistaa tason $\mathbb{R}^2$ kanssa eikä Weingartenin kuvausta S_p 2×2-matriisiin liian suoraviivaisesti.
Katso tarkemmin dokumentista *Lineaarikuvauksen determinantti ja jälki.*

2° Käytetään esimerkiksi Gramin ja Schmidtin ortogonalisointimenetelmää [**1**, §12], jonka avulla valitusta kannasta saadaan sisätuloavaruudelle V ortonormeerattu kanta $\{t_1, t_2\}$.

3° Lineaarikuvauksen L matriisi $A := \left[\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right]$ kannan $\{t_1, t_2\}$ suhteen määrätään kantavektoreiden kuvavektoreiden avulla seuraavasti:

$$Lt_1 = a_{1,1}\, t_1 + a_{2,1}\, t_2, \quad Lt_2 = a_{1,2}\, t_1 + a_{2,2}\, t_2.$$

4° Lineaarikuvauksen matriisi A ortonormeeratun kannan $\{t_1, t_2\}$ suhteen on symmetrinen, jos ja vain jos lineaarikuvaus L on symmetrinen eli toteuttaa ehdon $Lv \cdot w = v \cdot Lw$ kaikille $v, w \in V$; vrt. [**2**, §6].

5° Matriisien ominaisarvoteorian [**2**, luku III] nojalla symmetrisen matriisin A ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat reaaliset ja vastaavista ominaisvektoreista voidaan muodostaa tasoon $\mathbb{R}^2$ ortonormeerattu kanta $\{v_1, v_2\}$.

6° Olkoon $U\colon \mathbb{R}^2 \to V$ lineaarikuvaus, joka vie tason standardikannan avaruuden V ortonormeeratuksi kannaksi $\{t_1, t_2\}$, t.s. $U(1,0) = t_1$ ja $U(0,1) = t_2$. Tällöin lineaarikuvauksen $U^{-1}LU$ matriisi tason standardikannan suhteen on juuri A, joten kaikille tason vektoreille v on $U^{-1}LUv = Av$, t.s. $LUv = UAv$. Erityisesti, $LUv_j = UAv_j = \lambda_j\, Uv_j$, $j \in \{1, 2\}$.

7° Avaruudelle V saadaan ortonormeerattu kanta $\{e_1, e_2\}$, kun $e_1 := Uv_1$ ja $e_2 := Uv_2$. Tällöin $Le_j = \lambda_j\, e_j$, joten luvut λ_1 ja λ_2 ovat kuvauksen L ominaisarvot ja vektorit e_1 ja e_2 vastaavat ominaisvektorit.

Olkoot nyt k_1 ja $k_2 \in \mathbb{R}$ Weingartenin kuvauksen S_p ominaisarvot sekä e_1 ja $e_2 \in T_p(\mathcal{M})$ vastaavat ominaisvektorit, jotka voidaan olettaa yksikkövektoreiksi ja toisiaan vastaan kohtisuoriksi. Jokainen yksikkövektori $v \in T_p(\mathcal{M})$ voidaan esittää muodossa

$$v = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$. Pinnan $\mathcal{M}$ normaalikaarevuus vektorin v suuntaan on[5]

$$\begin{aligned} k(v) &= S_p(v) \cdot v = (\cos\theta\, S_p(e_1) + \sin\theta\, S_p(e_2)) \cdot v \\ &= (\cos\theta\, k_1\, e_1 + \sin\theta\, k_2\, e_2) \cdot v \\ &= \cos^2\theta\, k_1 + \sin^2\theta\, k_2. \end{aligned}$$

Saadusta esityksestä on helppo nähdä, että normaalikaarevuuden $k(v)$ ja ominaisarvojen k_1 ja k_2 välillä on voimassa, kun oletetaan, että $k_1 \geq k_2$,

$$\begin{aligned} k_1 &= \max\{k(v) \mid v \in T_p(\mathcal{M}),\ \|v\| = 1\}, \\ k_2 &= \min\{k(v) \mid v \in T_p(\mathcal{M}),\ \|v\| = 1\}. \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 6.11. Suunnistetun pinnan $(\mathcal{M}, \vec{N})$ Weingartenin kuvauksen S_p ominaisarvot $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ ovat *pinnan* $\mathcal{M}$ *pääkaarevuuksia pisteeessä* p ja vastaavat ominaisvektorit $e_1(p)$ ja $e_2(p)$ ovat *pinnan* $\mathcal{M}$ *pääkaarevuussuuntia pisteeessä* p.

---

[5]Tämä tulos tunnetaan *Eulerin lauseena* [**16**, §2–6] tai [**8**, Cor. 13.20]. Yhtälö on yksi monista LEONHARD EULERIN nimeä kantavista yhtälöistä ja kaavoista. EULER (1703–1783) oli yksi kaikkien aikojen tuottoisimmista matematiikoista. Julkaisujen joukossa on mm. äskettäin suomennettu *Kirjeitä saksalaiselle prinsessalle fysiikasta ja filosofiasta*, Oy Fram Ab, Vaasa, 2007 (suom. ja toim. JOHAN STÉN).

Lineaarikuvaukselle $L\colon V \to V$ (ks. 6.2.2) määritellään *determinantti* ja *jälki* asettamalla

$$\begin{aligned} \det L &:= \det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \text{ja} \\ \operatorname{tr} L &:= \operatorname{tr} A := a_{1,1} + a_{2,2}. \end{aligned}$$

On helppo todeta, että lineaarikuvauksen determinantti ja jälki ovat hyvinmääriteltyjä (eli määritelty arvo ei riipu valitusta kannasta; kannan ei tässä tarvitse olla edes ortonormeerattu).

MÄÄRITELMÄ 6.12. Suunnistetun pinnan $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *Gaussin kaarevuus* $K(p)$ ja *keskikaarevuus* $H(p)$ *pisteeessä* p määritellään kaavoilla

$$K(p) := \det S_p \quad \text{ja} \quad H(p) := \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} S_p. \tag{6.2}$$

Koska ominaisvektoreiden v_1 ja v_2 muodostamassa kannassa matriisin A määräämän lineaarikuvauksen matriisi on

$$\begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix},$$

saadaan

$$K(p) = k_1(p)\, k_2(p) \quad \text{ja} \quad H(p) = \tfrac{1}{2}\,(k_1(p) + k_2(p)).$$

Gaussin kaarevuutta $K(p)$, keskikaarevuutta $H(p)$ sekä pääkaarevuuksia $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ sitoo seuraava yhtälö:

LAUSE 6.13. *Suunnistetun pinnan* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *pääkaarevuudet* $k_1(p)$ *ja* $k_2(p)$ *toteuttavat yhtälön*

$$\lambda^2 - 2H(p)\,\lambda + K(p) = 0.$$

TODISTUS. Olkoon $A := \left[\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right]$ Weingartenin kuvauksen S_p matriisi tangenttiavaruuden $T_p(\mathcal{M})$ jonkin ortonormeeratun kannan $\{t_1, t_2\}$ suhteen. Koska pääkaarevuudet $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ ovat matriisin A ominaisarvot, toteuttavat ne yhtälön

$$\det(\lambda\,\mathbb{I} - A) = \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\,\lambda + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) = 0.$$

Väite seuraa tästä. □

Pääkaarevuudet $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ ovat siis

$$k_{1,2}(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Edellä esitetty ominaisarvoteoriaan perustuva menetelmä antaa geometrisen yhteyden Weingartenin kuvauksen ja varsinkin normaalikaarevuuden, pääkaarevuuksien ja pääkaarevuussuuntien välille. Kaarevuuksien laskeminen onnistuu kuitenkin helpommin, kun apuna käytetään pinnan lokaalia parametriesitystä ja siihen liittyviä Weingartenin yhtälöitä. Näitä tarkastellaan seuraavassa luvussa.