LUKU 3

Käyräteorian peruslause

3.1. Tasokäyrät

Aiemmin on nähty, että tason sileään C^2-polkuun liittyy kaksi tärkeää geometrista suuretta: kaarenpituus ja kaarevuus. Tässä luvussa on tarkoitus hahmotella käänteistä tulosta: polun kaarenpituus ja kaarevuus määräävät polun oleellisesti yksikäsitteisesti.

MÄÄRITELMÄ 3.1. *Avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *euklidinen liike* on kuvaus $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siten, että on olemassa lineaarikuvaus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja piste $p \in \mathbb{R}^n$ siten, että

$$F(x) = Ax + p,$$

ja että lineaarikuvauksen A matriisi avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannan suhteen on ortogonaalinen.

Euklidinen liike $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *suunnistuksen säilyttävä*, jos $\det A = +1$, ja *suunnistuksen kääntävä*, jos $\det A = -1$.

HUOMAUTUS 3.2. a) Voidaan osoittaa, että kuvaus $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on euklidinen liike, jos ja vain jos F on isometria. Tämä puolestaan tarkoittaa, että

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\| \quad \text{kaikille } x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Todistuksen osalta katso esimerkiksi [**8**, §5.1].

b) Tasossa ortotogonaalinen matriisi A voidaan esittää muodossa $A = P\,R_\theta$, missä

$$\begin{aligned} &P \text{ on peilaus } (x,y) \mapsto (x,-y), \text{ ja} \\ &R_\theta \text{ on kierto } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

LAUSE 3.3 (Yksikäsitteisyys). *Olkoot α, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ yksikkövauhtisia C^2-polkuja, joilla on sama (merkkinen) kaarevuus. Tällöin on olemassa euklidinen liike $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että $\gamma = F \circ \alpha$.*

TODISTUS. Katso esimerkiksi [**8**, §5.3]. □

LAUSE 3.4 (Tasokäyrien teorian peruslause). *Olkoon $\varkappa\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin on olemassa yksikkövauhtinen C^2-polku $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, jonka (merkkinen) kaarevuus on $\varkappa$.*

TODISTUS. Kun α on yksikkövauhtinen C^1-polku ja θ sen kiertokulma, niin $\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ ja $\theta'(s) = \varkappa(s) =$ polun α kaarevuus.

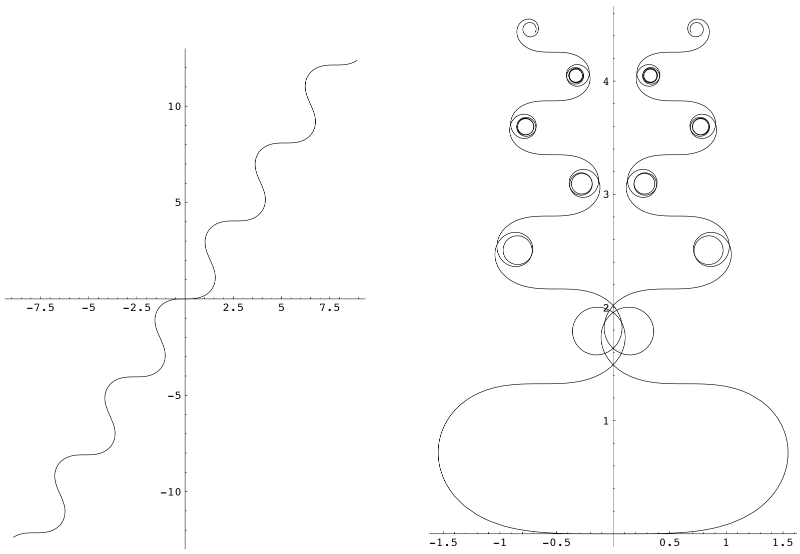
[1]Viimeksi muutettu 30.12.2009.

Olkoon nyt $\varkappa$ annettu. Valitaan mielivaltaiset $c \in I$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Asetetaan

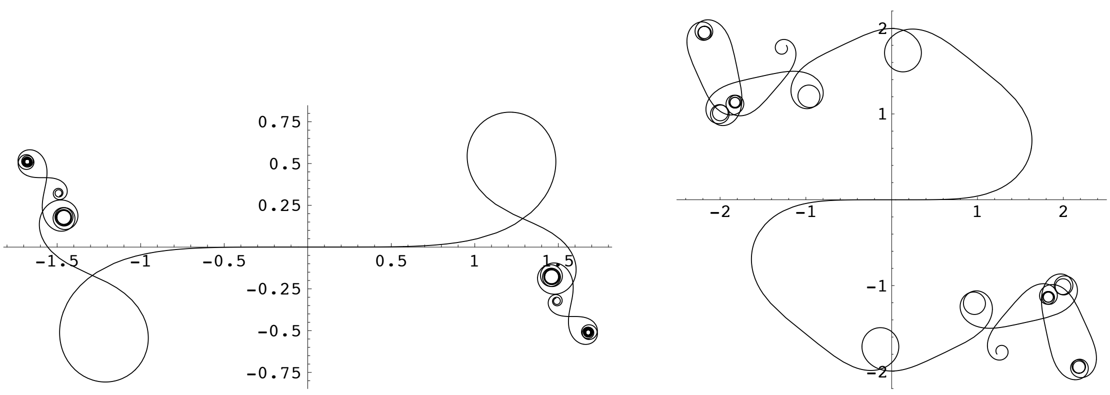
$$\begin{aligned} \theta(s) &:= \theta_0 + \int_c^s \varkappa(\sigma)\, d\sigma, \\ x(s) &:= x_0 + \int_c^s \cos\theta(\sigma)\, d\sigma, \\ y(s) &:= y_0 + \int_c^s \sin\theta(\sigma)\, d\sigma, \end{aligned}$$

ja $\alpha(s) := (x(s), y(s))$.

Näin määritelty polku on yksikkövauhtinen C^2-polku, jonka kaarevuus on $\varkappa$. $\square$



Kuva 1. Vasemman kuvan polulle on $\varkappa(s) = \sin s$, $-20 \le s \le 20$, oikean kuvan polulle on $\varkappa(s) = s \sin s$, $-20 \le s \le 20$.



Kuva 2. Vasemman kuvan polulle on $\varkappa(s) = s^2 \sin s$, $-10 \le s \le 10$, oikean kuvan polulle on $\varkappa(s) = s \sin^2 s$, $-20 \le s \le 20$.

3.2. Avaruuskäyrät

Avaruuskäyriin liittyy kolme geometrista suuretta: kaarenpituus, kaarevuus ja kierevyys. Kuten tasokäyrille, nämä kolme suuretta määräävät polun oleellisesti yksikäsitteisesti.

LAUSE 3.5 (Yksikäsitteisyys). *Olkoot $\alpha, \gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ yksikkövauhtisia C^2-polkuja, joilla on sama aidosti positiivinen kaarevuus $\varkappa_3$ ja sama kierevyys. Tällöin on olemassa euklidinen liike $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ siten, että $\gamma = F \circ \alpha$.*

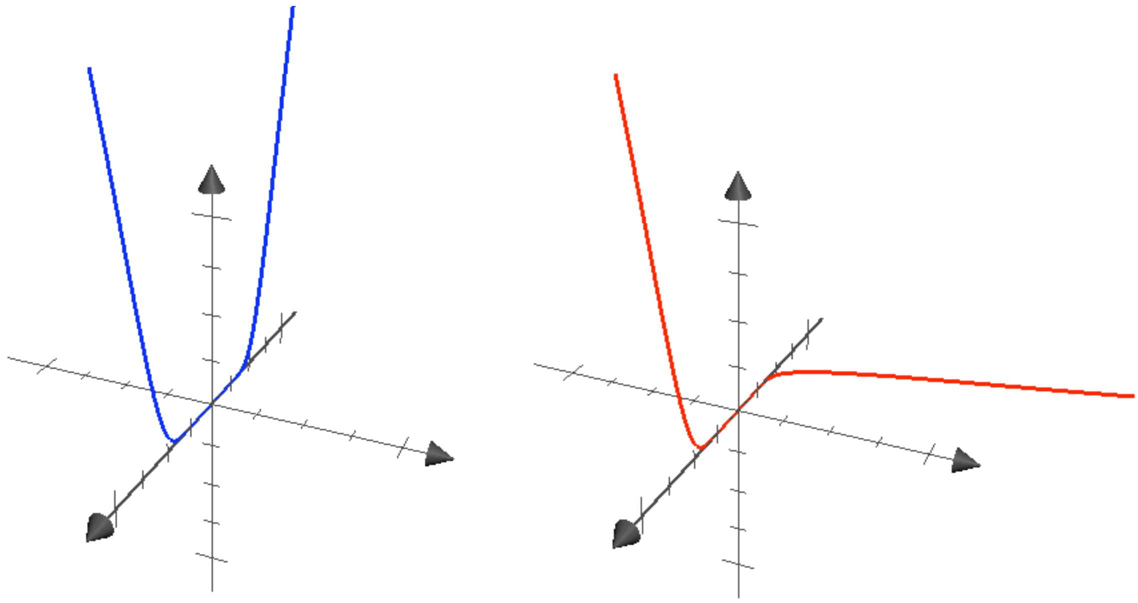
TODISTUS. Katso esimerkiksi [**8**, §8.1]. □

LAUSE 3.6 (Avaruuskäyrien teorian peruslause). *Olkoot $\varkappa, \tau \colon I \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita, ja $\varkappa_3(s) > 0$ kaikille $s \in I$. Tällöin on olemassa yksikkövauhtinen C^3-polku $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$, jonka kaarevuus on $\varkappa_3$ ja kierevyys τ.*

TODISTUS. Katso esimerkiksi [**8**, §8.2]. □

HUOMAUTUS 3.7. Edellisen lauseen oletus $\varkappa_3(s) > 0$ ei ole pelkästään "todistustekninen"; on mahdollista, että kahdella polulla on sama kaarevuus ja kierevyys, mutta niitä ei saa toisistaan euklidisella liikkeellä. Esimerkiksi, olkoot

$$\alpha(t) := \begin{cases} 0, & \text{kun } t = 0, \text{ ja} \\ (t, 0, 5\,e^{-1/t^2}), & \text{muuten; sekä} \end{cases} \qquad \gamma(t) := \begin{cases} (t, 5\,e^{-1/t^2}, 0), & \text{kun } t < 0, \\ 0, & \text{kun } t = 0, \text{ ja} \\ (t, 0, 5\,e^{-1/t^2}), & \text{kun } t > 0. \end{cases}$$



KUVA 3. Vasemman kuvan polku on α, oikean γ.

Tällöin α ja γ ovat C^∞-polkuja, joilla on sama kaarevuus (suoraan laskemalla) ja kierevyys (joka on identtisesti nolla, ovathan polut tasopolkuja parametriväleillä $t < 0$ ja $t > 0$). Näitä polkuja ei kuitenkaan saada toisistaan euklidisella liikkeellä. Parametriväliä $t > 0$ tarkastelemalla päädyttäisiin identtiseen kuvaukseen, ja parametriväliä $t < 0$ tarkastelemalla kiertoon.