LUKU 2

Avaruuskäyrän kaarevuus

2.1. Yksikkövauhtiset polut

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ yksikkövauhtinen C^2-polku. *Polun α kaarevuus* on

$$\varkappa_n\colon I \to \mathbb{R}, \quad \varkappa_n(s) := \|\alpha''(s)\|. \tag{2.1}$$

LEMMA 2.2. *Olkoon $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ yksikkövauhtinen C^2-polku tasossa. Tällöin sen kaavalla* (1.1) *määritellylle kaarevuudelle $\varkappa$ on voimassa*

$$|\varkappa(s)| = \|\alpha''(s)\| = \varkappa_2(s) \quad \textit{kaikille } s \in I.$$

TODISTUS. Lauseen 1.20 nojalla $\alpha''(s) = \varkappa(s)\, J\alpha'(s)$, joten

$$\|\alpha''(s)\| = \|\varkappa(s)\, J\alpha'(s)\| = |\varkappa(s)|\, \|J\alpha'(s)\| = |\varkappa(s)|. \tag{2.2}$$ □

LEMMA 2.3. *Olkoon X differentioituva vektorikenttä pitkin polkua $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$. Jos $\|X(t)\| = 1$ kaikille $t \in I$, niin*

$$X'(t) \cdot X(t) = 0 \quad \textit{kaikille } s \in I.$$

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ yksikkövauhtinen C^2-polku avaruudessa. *Polun α yksikkötangenttivektorikenttä* on

$$T := \alpha'\colon I \to \mathbb{R}^3.$$

Jos polun α kaarevuudelle on $\varkappa_3(s) > 0$ kaikille $s \in I$, asetetaan

$$N := \frac{T'}{\varkappa_3},$$

polun α päänormaali, ja

$$B := T \times N,$$

polun α sivunormaali.

Kolmikko $\{T, N, B\}$ on *polun α Frenet'n koordinaatisto.*

HUOMAUTUS 2.5. *Vektoreiden $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ ristitulo* on

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ristitulolla on seuraavat ominaisuudet (väitteiden todistaminen jätetään lukijan tehtävksi): Kaikille a, b, c, $d \in \mathbb{R}^3$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

(i) $a \times b = -b \times a$ (antisymmetria);

[1]Viimeksi muutettu 30.12.2009.

(ii) $a \times a = 0$;
(iii) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$;
(iv) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$ (yhdessä edellisen kohdan kanssa: lineaarisuus ensimmäisen muuttujan suhteen; ensimmäisen kohdan nojalla ristitulo on lineaarinen myös toisen muuttujan suhteen);
(v) $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ (osoita väite aluksi standardikantavektoreille; käytä lineaarisuutta);
(vi) $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$;
(vii) $\|a \times b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta$, kun θ on vektoreiden a ja b välinen kulma (muista, että vektoreiden $a, b \in \mathbb{R}^3$ välinen kulma θ määriteltiin siten, että $0 \le \theta \le \pi$ ja $a \cdot b = \|a\|\,\|b\| \cos\theta$);
(viii) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$;
(ix) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c) =$ determinantti, jonka riveinä (tai sarakkeina) ovat vektorit a, b ja c;
(x) $(a \times b) \cdot a = (a \times b) \cdot b = 0$ ($a \times b$ on kohtisuorassa vektoreita a ja b vastaan);
(xi) ristitulo $a \times b$ on nollasta eroava, jos ja vain jos vektorit a ja b ovat lineaarisesti riippumattomat.

Kohdan (vii) tulos voivaan tulkita siten, että $\|a \times b\|$ on sen suorakaiteen pinta-ala, mille sivuina ovat vektorit a ja b. Vektori $a \times b$ on kohtisuorassa tätä suorakaidetta vastaan ja vektorit a, b ja $a \times b$ muodostavat ”oikeakätisen systeemin”.

Kohdan (viii) avulla on helppo johtaa muistisääntö sykliselle kiertovaihtelulle: Kun t ja n ovat ortogonaaliset yksikkövektorit ja $b := t \times n$, niin $t = n \times b$ ja $n = b \times t$. Erityisesti $e_3 = e_1 \times e_2$, $e_2 = e_3 \times e_1$ ja $e_1 = e_2 \times e_3$.

LAUSE 2.6. *Olkoon $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ yksikkövauhtinen C^3-polku. Oletetaan, että polun α kaarevuudelle on $\varkappa_3(s) > 0$ kaikille $s \in I$.*

Tällöin

(i) $\|T\| = \|N\| = \|B\| = 1$ *ja* $T \perp N$, $N \perp B$, $B \perp T$;
(ii) *seuraavat ns.* Frenet'n kaavat *pätevät:*

$$\begin{cases} T' = \;\; \varkappa_3 N \\ N' = -\varkappa_3 T \;\; + \tau B \\ B' = \; - \tau N \end{cases} \tag{2.3}$$

missä funktio $\tau\colon I \to \mathbb{R}$, polun α kierevyys, *määritellään viimeisen kaavan avulla.*

TODISTUS. Määritelmiensä perusteella $\|T\| = \|N\| = 1$. Lemman 2.3 nojalla $T'(s) \cdot T(s) = 0$ kaikille $s \in I$, joten $T \perp N$. Ristitulon ominaisuuksien nojalla $\|B\| = 1$, $N \perp B$ ja $B \perp T$.

Kohdan (ii) kaavoista ensimmäinen seuraa päänormaalin määritelmästä.

Kolmatta yhtälöä varten derivoidaan identiteetti $B \cdot T = 0$ puolittain: $0 = B' \cdot T + B \cdot T'$, joten $B' \cdot T = -B \cdot T' = -B \cdot (\varkappa_3 N) = 0$. Toisaalta, lemman 2.3 nojalla $B' \cdot B = 0$. Koska vektorit $T(s)$, $N(s)$ ja $B(s)$ muodostavat avaruuden ortonormaalin kannan kaikille $s \in I$, seuraa ehdoista $B' \cdot T = 0$ ja $B' \cdot B = 0$, että vektori B' on vektorin N monikerta, t.s. jokaiselle $s \in I$ on olemassa $\tau(s) \in \mathbb{R}$ siten, että

$$B'(s) = -\tau(s)\, N(s).$$

Toista yhtälöä varten esitetään derivaatta N' kannan $\{T, N, B\}$ avulla

$$N' = (N' \cdot T)\, T + (N' \cdot N)\, N + (N' \cdot B)\, B.$$

Lemman 2.3 nojalla on $N' \cdot N = 0$.
Ehdosta $N \cdot T = 0$ saadaan puolittain derivoimalla

$$N' \cdot T = -N \cdot T' = -N \cdot (\varkappa_3\, N) = -\varkappa_3.$$

Vastaavasti, ehdosta saadaan

$$N' \cdot B = -N \cdot B' = -N \cdot (-\tau\, N) = \tau.$$

Väite seuraa näistä kaavoista. $\square$

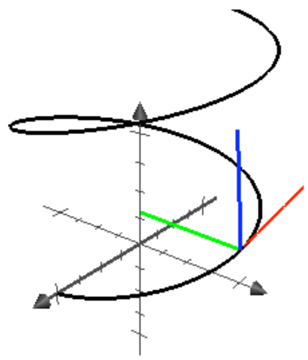
Esimerkki 2.7 (Ruuviviiva). *Ruuviviivan* $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\beta(t) := (a\cos t, a\sin t, b\,t),$$

yksikkövauhtinen uudelleenparametrisointi on

$$\alpha(s) = \Big(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big),$$

kunhan $a^2 + b^2 > 0$.



Kuva 1. Ruuviviiva, sen yksikkötangentti, päänormaali ja sivunormaali.

Ruuviviiva
Oletetaan, että $a > 0$. Merkitään $c := \sqrt{a^2+b^2}$.
Nyt

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right)$$

ja

$$T'(s) = \frac{1}{c^2}\left(-a\cos\frac{s}{c}, -a\sin\frac{s}{c}, 0\right).$$

Siis

$$\varkappa_3(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

ja

$$N(s) = \frac{\|T'(s)\|}{\varkappa_3(s)} = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right).$$

Sivunormaalille saadaan

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{1}{c}\Big(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\Big),$$

joten

$$B'(a) = \frac{1}{c^2}\Big(b\cos\frac{s}{c}, b\sin\frac{s}{c}, 0\Big).$$

Ruuviviivan kierevyys on siis

$$\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Huomautus 2.8. Yksikkövauhtiselle C^2-polulle α ehto ”$\varkappa_3(s) > 0$ kaikille $s \in I$” on yhtäpitävä ehdon ”$\alpha'(s) \times \alpha''(s) \neq 0$ kaikille $s \in I$” kanssa. Nimittäin, vektorit $\alpha'(s)$ ja $\alpha''(s)$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten

$$\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\| = \|\alpha'(s)\|\,\|\alpha''(s)\| = \varkappa_3(s).$$

2.2. Sileät polut

Määritelmä 2.9. Olkoot $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ sileä C^2-polku, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ sen yksikkövauhtinen uudelleenparametrisointi ja $s\colon J \to I$ polun β kaarenpituusparametri (siis s on bijektio $J \to I$ ja $s'(t) = \|\beta'(t)\|$ kaikille $t \in J$).

Oletetaan, että polun α kaarevuudelle $\varkappa_{\alpha,3}$ on $\varkappa_{\alpha,3}(s) > 0$ kaikille $s \in I$.

Olkoon polun α kierevyys τ_α ja $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ polun α Frenet'n koordinaatisto.

Polun β kaarevuus $\varkappa_3$, kierevyys τ ja Frenet'n koordinaatisto $\{T, N, B\}$ määritellään kaavoilla

$$\varkappa_3(t) := \varkappa_{\alpha,3}(s(t)), \quad \tau(t) := \tau_\alpha(s(t)),$$
$$T(t) := T_\alpha(s(t)), \quad N(t) := N_\alpha(s(t)), \quad B(t) := B_\alpha(s(t)).$$

Lause 2.10. *Olkoon $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ sileä C^3-polku, jonka kaarevuus on aidosti positiivinen. Olkoon $v := \|\beta'\|$ polun β vauhti.*

Tällöin seuraavat yleiset Frenet'n kaavat pätevät:

$$\begin{cases} T' = & v\,\varkappa_3\,N & \\ N' = -v\,\varkappa_3\,T & & +\,v\,\tau\,B \\ B' = & -\,v\,\tau\,N & \end{cases} \tag{2.4}$$

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

Lemma 2.11. *Sileälle C^2-polulle $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$, jonka vauhti on v, ja jonka kaarevuus $\varkappa_3$ on aidosti positiivinen, on voimassa*

$$\beta' = v\,T,$$
$$\beta'' = v'\,T + v^2\,\varkappa_3\,N.$$

Todistus. Olkoot α ja s kuten määritelmässä 2.9. Tällöin $\beta(t) = \alpha(s(t))$, $t \in J$. Kejusäännön nojalla

$$\beta'(t) = \alpha'(s(t))\,s'(t) = T_\alpha(s(t))\,v(t) = T(t)\,v(t),$$

ja Frenet'n kaavojen 2.10 avulla (huomaa: ensimäiselle kaavalla riittää C^2)

$$\beta''(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)\,T'(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)^2\,\varkappa_3(t)\,N(t).$$ □

LAUSE 2.12. *Olkoon* $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ C^3*-polku, jolle* $\beta'(t) \times \beta''(t) \neq 0$ *kaikille* $t \in J$. *Tällöin*

$$T = \frac{\beta'}{\|\beta'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\beta' \times \beta''}{\|\beta' \times \beta''\|},$$
$$\varkappa_3 = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}, \quad \tau = \frac{\beta' \times \beta'' \cdot \beta'''}{\|\beta' \times \beta''\|^2}.$$

TODISTUS. Väite tangentille T seuraa edellisestä lemmasta.
Väite normaalille N seuraa ristitulon ominaisuuksista.
Edellisen lemman nojalla

$$\begin{aligned}\beta' \times \beta'' &= (v\,T) \times (v'\,T + v^2\,\varkappa_3\,N)\\ &= v\,v'\,T \times T + v^3\,\varkappa_3\,T \times N = v^3\,\varkappa_3\,B.\end{aligned}$$

Kaarevuutta $\varkappa$ ja sivunormaalia B koskevat väitteet seuraavat tästä.
Edellisen lemman ja Frenet'n kaavojen avulla saadaan

$$\begin{aligned}\beta''' &= v''\,T + v'\,T' + (v^2\,\varkappa_3)'\,N + v^2\,\varkappa_3\,N'\\ &= v''\,T + v'\,v\,\varkappa_3\,N + (v^2\,\varkappa_3)'\,N - v^3\,\varkappa_3^2\,T + v^3\,\varkappa_3\,\tau\,B.\end{aligned}$$

Koska $\{T, N, B\}$ on ortonormeerattu kanta, saadaan

$$\beta' \times \beta'' \cdot \beta''' = v^3\,\varkappa_3\,B \cdot \beta''' = v^6\,\varkappa_3^2\,\tau.$$

Toisaalta, $\|\beta' \times \beta''\|^2 = v^6\,\varkappa_3^2$, joten kierevyyttä τ koskeva väite seuraa. $\square$