LUKU 8

Geodeettinen kaarevuus

8.1. Darboux'n koordinaatisto

Olkoon $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta. Jokaiselle $p \in \mathcal{M}$ ja $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$ asetetaan

$$J_p v_p := \vec{N}(p) \times v_p.$$

Koska ristitulo on kohtisuorassa kumpaakin tekijäänsä vastaan, on erityisesti $J_p v_p \perp \vec{N}(p)$, joten $J_p v_p \in T_p(\mathcal{M})$. Tästä seuraa, että J_p on lineaarikuvaus $T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M})$. Ristitulon ominisuuksista seuraa myös

$$J_p^2 v_p = J_p(J_p v_p) = -v_p \quad \text{kaikille } v_p \in T_p(\mathcal{M}).$$

Geometrisesti J_p on kierto tangenttiavaruudessa $T_p(\mathcal{M})$ kulman $\frac{\pi}{2}$ verran vastapäivään normaalivektorin $\vec{N}(p)$ suunnasta katsottuna.

Olkoon $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ yksikkövauhtinen C^2-polku. Polulle $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ on $\beta''(s) \cdot \beta'(s) = 0$ kaikille $s \in I$. Kolmikko $\{\beta'(s), J_{\beta(s)}\beta'(s), \vec{N}(\beta(s))\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3_{\beta(s)}$ ortonormaali kanta, joten vektori $\beta''(s)$ on vektoreiden $J_{\beta(s)}\beta'(s)$ ja $\vec{N}(\beta(s))$ lineaarikombinaatio.

Asetetaan

$$\varkappa_g(s) := \beta''(s) \cdot J_{\beta(s)}\beta'(s), \quad \textit{polun } \beta \textit{ geodeettinen kaarevuus}, \text{ ja}$$
$$\varkappa_n(s) := \beta''(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)), \quad \textit{polun } \beta \textit{ normaalikaarevuus}.$$

Polun β kiihtyvyysvektori voidaan siis esittää muodossa

$$\beta''(s) = \varkappa_g(s)\, J_{\beta(s)}\beta'(s) + \varkappa_n(s)\, \vec{N}(\beta(s)).$$

Olkoon S_p pinnan $\mathcal{M}$ Weingartenin kuvaus pisteessä p. Siis S_p on lineaarikuvaus $T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M})$, jolle $S_p(v_p) = -D_{v_p}\vec{N}$, kun $v_p \in T_p(\mathcal{M})$. Muistettakoon, että

$$k(\beta'(s)) = S_{\beta(s)}(\beta'(s)) \cdot \beta'(s)$$

on pinnan $\mathcal{M}$ normaalikaarevuus tangenttivektorin $\beta'(s)$ suuntaan.

Asetetaan

$$\tau_g(s) := S_{\beta(s)}(\beta'(s)) \cdot J_{\beta(s)}\beta'(s), \quad \textit{polun } \beta \textit{ geodeettinen kierevyys.}$$

Koska $\{\beta'(s), J_{\beta(s)}\beta'(s)\}$ on tangenttiavaruuden $T_{\beta(s)}(\mathcal{M})$ ortonormaali kanta, voidaan Weingartenin kuvauksen arvo pisteessä $\beta(s)$ tangenttivektorin $\beta'(s)$ suuntaan esittää muodossa

$$S_{\beta(s)}(\beta'(s)) = k(\beta'(s))\, \beta'(s) + \tau_g(s)\, J_{\beta(s)}\beta'(s).$$

[1]Viimeksi muutettu 28.2.2010.

Olkoot $\alpha\colon J \to \mathcal{M}$ sileä C^2-polku, $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ sen yksikkövauhtinen uudelleenparametrisointi ja $s\colon J \to I$ polun α kaarenpituusparametri (siis s on bijektio $J \to I$ ja $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ kaikille $t \in J$ ja $\alpha(t) = \beta(s(t))$ kaikille $t \in J$).

Olkoon polun β geodeettinen kaarevuus $\varkappa_{\beta,g}$, normaalikaarevuus $\varkappa_{\beta,n}$ ja geodeettinen kierevyys $\tau_{\beta,g}$. Polun α geodeettinen kaarevuus $\varkappa_g$, normaalikaarevuus $\varkappa_n$ ja geodeettinen kierevyys τ_g määritellään kaavoilla

$$\varkappa_g(t) := \varkappa_{\beta,g}(s(t)), \quad \varkappa_n(t) := \varkappa_{\beta,n}(s(t)) \quad \text{ja} \quad \tau_g(t) := \tau_{\beta,g}(s(t)).$$

Lause 8.1. *Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, $u \in T_p(\mathcal{M})$ yksikkövektori ja $\beta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ yksikkövauhtinen C^2-polku siten, että, $\beta(0) = p$ ja $\beta'(0) = u$.*

Tällöin polun β normaalikaarevuudelle $\varkappa_n$ on

$$\varkappa_n(0) = k(u) = \textit{pinnan } \mathcal{M} \textit{ normaalikaarevuus vektorin } u \textit{ suuntaan.}$$

Todistus. Määritelmän nojalla

$$k(u) = S_p(u) \cdot u = S_p(\beta'(0)) \cdot \beta'(0).$$

Mutta (lause 6.6)

$$S_{\beta(s)}(\beta'(s)) \cdot \beta'(s) = \beta''(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)).$$

Väite seuraa tästä ja polun β normaalikaarevuuden määritelmästä. □

Lause 8.2. *Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\alpha\colon J \to \mathcal{M}$ sileä C^2-polku.*

Tällöin polun α geodeettinen kaarevuus on

$$\varkappa_g(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

normaalikaarevuus on

$$\varkappa_n(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \vec{N}(\alpha(t))}{\|\alpha'(t)\|^2},$$

ja geodeettinen kierevyys on

$$\tau_g(t) = \frac{S_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Todistus. Olkoot $s\colon J \to I$ polun α kaarenpituusparametri ja $\beta := \alpha \circ s^{-1}$. Tällöin β on yksikkövauhtinen ja $\alpha(t) = \beta(s(t))$ kaikille $t \in J$.

Nyt

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s(t))\, s'(t) \quad \text{ja} \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t))\, s'(t)^2 + \beta'(s(t))\, s''(t). \end{aligned}$$

Polun α normaalikaarevuus on

$$\beta''(s(t)) \cdot \vec{N}(\beta(s(t))) = \frac{\alpha''(t) \cdot \vec{N}(\alpha(t))}{s'(t)^2},$$

koska $\beta'(s(t)) \cdot \vec{N}(\beta(s(t))) = 0$. Koska $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, normaalikaarevuutta koskeva väite seuraa.

Polun α geodeettista kaarevuutta ja kierevyyttä koskevat väitteet todistetaan vastaavalla tavalla; yksityiskohdat jätetään lukijan tehtäväksi. □

Huomautus 8.3. Koska $J_p v_p = \vec{N}(p) \times v_p$ ja

$$\begin{aligned} w_p \cdot J_p v_p &= w_p \cdot (\vec{N}(p) \times v_p) = \det[w\ N(p)\ v] \\ &= \text{determinantti, jonka sarakkeina ovat } w,\ N(p) \text{ ja } v, \end{aligned}$$

on polun α geodeettinen kaarevuus

$$\varkappa_g(t) = \frac{\det[\alpha''(t)\ N(\alpha(t))\ \alpha'(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Lause 8.4. *Olkoot* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *suunnistettu pinta ja* $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ *yksikkövauhtinen* C^2*-polku. Asetetaan* $T(s) := \beta'(s)$ *ja* $(JT)(s) := J_{\beta(s)}T(s)$*,* $s \in I$*.*

Tällöin

$$\begin{cases} T' = \varkappa_g\, JT + \varkappa_n\, \vec{N} \circ \beta \\ (JT)' = -\varkappa_g\, T + \tau_g\, \vec{N} \circ \beta \\ (\vec{N} \circ \beta)' = -\varkappa_n\, T - \tau_g\, JT \end{cases}$$

Ortonormeerattu kanta $\{T, JT, \vec{N} \circ \beta\}$ *on* polun β Darboux'n koordinaatisto.

Todistus. Tangenttivektorin T derivaatta T' on kohtisuorassa vektoria T vastaan, joten

$$T' = a\, JT + b\, \vec{N} \circ \beta,$$

missä $a = T' \cdot JT = \varkappa_g$ ja $b = T' \cdot (\vec{N} \circ \beta) = \varkappa_n$.

Derivaatalle $(JT)'$ on

$$(JT)' = a\, T + b\, \vec{N} \circ \beta,$$

missä $a = (JT)' \cdot T$ ja $b = (JT)' \cdot (\vec{N} \circ \beta)$. Nyt ehdosta $JT \cdot T = 0$ saadaan puolittain derivoimalla

$$(JT)' \cdot T + JT \cdot T' = 0,$$

joten

$$(JT)' \cdot T = -JT \cdot T' = -\varkappa_g.$$

Vastaavasti, $(JT)' \cdot (\vec{N} \circ \beta) = -JT \cdot (\vec{N} \circ \beta)'$, joten

$$b = -J_{\beta(s)}T(s) \cdot (\vec{N} \circ \beta)'(s) = -J_{\beta(s)}T(s) \cdot D_{\beta'(s)}\vec{N} = J_{\beta(s)}T(s) \cdot S_{\beta(s)}(\beta'(s)) = \tau_g.$$

Viimeinen väite todistetaan vastaavalla tavalla; yksityiskohdat jätetään lukijan tehtäväksi. □

Lause 8.5. *Olkoot* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *suunnistettu pinta ja* $\alpha\colon J \to \mathcal{M}$ *sileä* C^2*-polku. Asetetaan* $v := \|\alpha'\|$*,* $T(t) := \alpha'(t)/v(t)$ *ja* $(JT)(t) := J_{\alpha(t)}T(t)$*,* $t \in J$*. Tällöin polun* α *Darboux'n koordinaatistolle* $\{T, JT, \vec{N} \circ \alpha\}$ *on voimassa*

$$\begin{cases} T' = v\, \varkappa_g\, JT + v\, \varkappa_n\, \vec{N} \circ \alpha \\ (JT)' = -v\, \varkappa_g\, T + v\, \tau_g\, \vec{N} \circ \alpha \\ (\vec{N} \circ \alpha)' = -v\, \varkappa_n\, T - v\, \tau_g\, JT \end{cases}$$

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

8.2. Darboux'n koordinaatisto vs. Frenet'n koordinaatisto

Yksikkövauhtiseen polkuun $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ liittyy edellä määritellyn Darboux'n koordinaatiston lisäksi avaruuskäyrän kaarevuutta tarkasteltaessa määritelty Frenet'n koordinaatisto.

Oletetaan, että polun β kaarevuudelle on $\varkappa_3(s) > 0$ kaikille $s \in I$. Asetetaan

$$\begin{aligned} &T(s) := \beta'(s) \quad \text{ja} \quad (JT)(s) := J_{\beta(s)}T(s) \quad \text{sekä} \\ &P(s) := \frac{T'(s)}{\varkappa_3(s)} \quad \text{(polun } \beta \text{ päänormaali) ja} \\ &B(s) := T(s) \times P(s) \quad \text{(polun } \beta \text{ sivunormaali).} \end{aligned}$$

Tällöin siis $\{T, JT, \vec{N} \circ \beta\}$ on polun β Darboux'n koordinaatisto ja $\{T, P, B\}$ vastaavasti polun β Frenet'n koordinaatisto.

Olkoon $\theta = \theta(s)$ pinnan $\mathcal{M}$ normaalin $\vec{N}(\beta(s))$ ja polun β päänormaalin $P(s)$ välinen kulma siten, että[2]

$$P(s) = \sin\theta(s)\,(JT)(s) + \cos\theta(s)\,\vec{N}(\beta(s)).$$

Tällöin

$$B(s) = T(s) \times P(s) = \sin\theta(s)\,\vec{N}(\beta(s)) - \cos\theta(s)\,(JT)(s).$$

Näistä yhtälöistä saadaan lasketuksi sisätulot

$$\begin{cases} P(s) \cdot (JT)(s) = \sin\theta(s) \\ P(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) = \cos\theta(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(s) \cdot (JT)(s) = -\cos\theta(s) \\ B(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) = \sin\theta(s) \end{cases}$$

Vastaavasti vektorit $(JT)(s)$ ja $\vec{N}(\beta(s))$ saadaan vektoreiden $P(s)$ ja $B(s)$ avulla:

$$\begin{cases} (JT)(s) = \sin\theta(s)\,P(s) - \cos\theta(s)\,B(s), \\ \vec{N}(\beta(s)) = \cos\theta(s)\,P(s) + \sin\theta(s)\,B(s). \end{cases}$$

Avaruuskäyrän päänormaalin määritelmästä (tai Frenet'n kaavoista) saadaan

$$T'(s) = \varkappa_3(s)\,P(s) = \varkappa_3(s)\,\sin\theta(s)\,(JT)(s) + \varkappa_3(s)\,\cos\theta(s)\,\vec{N}(\beta(s)).$$

Vertaamalla tätä Darboux'n yhtälöihin (lause 8.4), saadaan

$$\varkappa_g(s) = \varkappa_3(s)\,\sin\theta(s) \quad \text{ja} \quad \varkappa_n(s) = \varkappa_3(s)\,\cos\theta(s).$$

Voidaan osoittaa, että nytkin kulma θ on differentioituva. Kun derivoidaan JT ja käytetään Frenet'n kaavoja (τ on polun β kierevyys), saadaan

$$\begin{aligned} (JT)'(s) &= \theta'(s)\cos\theta(s)\,P(s) + \sin\theta(s)\,P'(s) \\ &\quad + \theta'(s)\sin\theta(s)\,B(s) - \cos\theta(s)\,B'(s), \\ &= \theta'(s)\cos\theta(s)\,P(s) + \sin\theta(s)\,(-\varkappa_3(s)\,T(s) + \tau(s)\,B(s)) \\ &\quad + \theta'(s)\sin\theta(s)\,B(s) - \cos\theta(s)\,(-\tau(s)\,P(s)). \end{aligned}$$

[2] Vertaa tason polun kiertymiskulmaan (määritelmä 1.2): kun α on yksikkövauhtinen, on sen kiertymiskulmalle $\alpha'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = (\cos\theta(t))\,e_1 + (\sin\theta(t))\,e_2$, missä e_1 ja e_2 ovat tason standardikantavektorit.

Darboux'n yhtälöiden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\tau_g(s) &= (JT)'(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) \\
&= (\theta'(s)\cos\theta(s) + \cos\theta(s)\,\tau(s))\,P(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) \\
&\quad - \sin\theta(s)\,\varkappa_3(s)\,T(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) \\
&\quad + (\sin\theta(s)\,\tau(s) + \theta'(s)\sin\theta(s))\,B(s) \cdot \vec{N}(\beta(s)) \\
&= (\theta'(s)\cos\theta(s) + \cos\theta(s)\,\tau(s))\,\cos\theta(s) - 0 \\
&\quad + (\sin\theta(s)\,\tau(s) + \theta'(s)\sin\theta(s))\,\sin\theta(s) \\
&= \theta'(s) + \tau(s).
\end{aligned}$$

Siis

$$\tau_g(s) = \theta'(s) + \tau(s).$$

Huomaa, että jos polun β päänormaali on pinnalle $\mathcal{M}$ normaali (t.s. $\theta(s) \equiv 0$ tai $\theta(s) \equiv \pi$), on $\theta'(s) \equiv 0$, niin

$$\tau_g(s) = \tau(s), \quad \varkappa_g(s) = 0 \quad \text{ja} \quad \varkappa_n(s) = \pm\varkappa_3(s).$$