JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaaligeometrian alkeet
Harjoitukset 9 13.4.2010

Jatkuu. . . ↻

1. Täydennä lauseen 8.2 todistus: Osoita, että polun α

$$\text{geodeettinen kaarevuus} \quad \varkappa_g(t) = \frac{\alpha''(t)\cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \text{ja}$$

$$\text{geodeettinen kierevyys} \quad \tau_g(t) = \frac{S_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

2. Täydennä lauseen 8.4 todistus: Osoita, että $(\vec{N}\circ\beta)' = -\varkappa_n T - \tau_g JT$.

3. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ yksikkövauhtinen C^2-polku.
Määrää pitkin polkua β liikkuva vektorikenttä $D\colon I \to \mathbb{R}^3$ siten, että lauseen 8.4 yhtälöt saavat muodon

$$T' = D\times T, \quad (JT)' = D\times JT, \quad (\vec{N}\circ\beta)' = D\times(\vec{N}\circ\beta).$$

4. Käytetään pallon $S^2 = \{p\in\mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$ parametriesityksenä pallokoordinaatteja

$$\varphi(t,\theta) = (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, \sin t).$$

a) Parametrisoi leveyspiiri $\beta_t\colon \theta\mapsto\varphi(t,\theta)$ yksikkövauhtiseksi. Selvyyden vuoksi anna tälle polulle nimeksi γ.
b) Määrää polun γ kaarevuus $\varkappa_3$ ja kierevyys τ sekä Frenet'n koordinaatisto $\{T, P, B\}$. Käytä päänormaalille nimeä P; vrt. §8.2.
c) Määrää polun γ geodeettinen kaarevuus $\varkappa_g$, normaalikaarevuus $\varkappa_n$ ja geodeettinen kierevyys τ_g.
d) Määrää polun γ päänormaalin $P = P(\theta)$ ja pallon S^2 normaalin $\vec{N}(\gamma(\theta))$ välinen kulma $\delta = \delta(\theta)$ (selvyyden vuoksi nimeä monisteen kohdan §8.2 kulma $\theta(s)$ uudestaan nimelle $\delta(\theta)$).
e) Totea, että

$$\varkappa_g(\theta) = \varkappa_3(\theta)\sin\delta(\theta), \quad \varkappa_n(\theta) = \varkappa_3(\theta)\cos\delta(\theta) \quad \text{ja} \quad \tau_g(\theta) = \delta'(\theta) + \tau(\theta)$$

5. (Merkinnät: H 4/T 5 ja H 5/T 4.) Olkoot $\mathcal{M} = \varphi(I\times\mathbb{R})$ pyörähdyspinta sekä $\alpha_\theta\colon I\to\mathcal{M}$ sen pituuspiiri ja $\beta_t\colon\mathbb{R}\to\mathcal{M}$ leveyspiiri,

$$\alpha_\theta(t) := \beta_t(\theta) := \varphi(t,\theta) = (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t)).$$

Osoita, että

a) kaikki pituuspiirit α_θ ovat geodeettisia;
b) leveyspiiri β_t on geodeettinen, jos ja vain jos $x_1'(t) = 0$.

[Vihje: Tangenttiavaruudella $T_{\varphi(t,\theta)}(\mathcal{M})$ on kanta $\{E_1^\varphi(t,\theta), E_2^\varphi(t,\theta)\}$.]

6. Todista lause 9.7: Polku α on esigeodeettinen, jos ja vain jos on olemassa funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\top_{\alpha(t)}\alpha''(t) = f(t)\,\alpha'(t) \quad \text{kaikille } t \in I.$$

Huomio. Pääsiäisen takia luentoja ei ole 29.3., 31.3. ja 5.4. eikä harjoituksia 30.3. Harjoitukset 6.4. ja luento 7.4. siirretään seuraavalle viikolle (=13.4. ja 14.4.).

***7.** Olkoon $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}^3$ siten, että $f(v) = a \cdot v$ kaikille $v \in \mathbb{R}^3$.

***8.** (Jatkoa.) Olkoot $b,\ c \in \mathbb{R}^3$, ja $f(v) := \det[v \quad b \quad c]$, $v \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että f on lineaarinen, ja määrää edellisen tehtävän vektori a vektoreiden b ja c avulla ilmaistuna.

***9.** Olkoot $a \in \mathbb{R}^3$ ja $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Lv := a \times v$, $v \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että lineaarikuvauksen L matriisi standardikannan suhteen on antisymmetrinen.
[Muista: matriisi $A = [a_{j,k}]_{j,k=1}^3$ on antisymmetrinen, jos matriisin A transpoosi $A^t = [b_{j,k}]_{j,k=1}^3$, missä $b_{j,k} := -a_{k,j}$.]

***10.** Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jonka matriisi standardikannan suhteen on antisymmetrinen. Osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}^3$ siten, että $Lv = a \times v$ kaikille $v \in \mathbb{R}^3$.

***11.** Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $T, V, U\colon I \to \mathbb{R}^3$ C^1-vektorikenttiä siten, että $\{T(t), V(t), U(t)\}$ on ortonormaali kanta kaikille $t \in I$. Voit olettaa, että $U = T \times V$. Miksi?

Osoita, että

a) on olemassa jatkuvat funktiot $a_{j,k}\colon I \to \mathbb{R}$ $(1 \le j,\ k \le 3)$ siten, että

$$\begin{cases} T' = a_{1,1}\,T + a_{2,1}\,V + a_{3,1}\,U \\ V' = a_{1,2}\,T + a_{2,2}\,V + a_{3,2}\,U \\ U' = a_{1,3}\,T + a_{2,3}\,V + a_{3,3}\,U \end{cases}$$

b) kerroinmatriisi $\left[a_{j,k}\right]_{j,k=1}^{3}$ on antisymmetrinen,

$$\begin{cases} a_{1,1} = 0, \quad a_{2,2} = 0, \quad a_{3,3} = 0, \\ a_{1,2} = -a_{2,1}, \quad a_{1,3} = -a_{3,1}, \quad a_{2,3} = -a_{3,2} \end{cases}$$

c) on olemassa vektorikenttä D siten, että

$$\begin{cases} T' = D \times T \\ V' = D \times V \\ U' = D \times U \end{cases}$$