JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Jatkuu. . . ↻

Differentiaaligeometrian alkeet
Harjoitukset 8 23.3.2010

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u,v) := u\,v$.
Määrää funktion f kuvaajan, tavallisen satulapinnan, ensimmäisen ja toisen perusmuodon kertoimet, sekä sen Gaussin kaarevuus ja keskikaarevuus.

2. Sileä pinta $\mathcal{M}$ on *viivoitinpinta*, jos se voidaan esittää parametrimuodossa $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{U})$ siten, että

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\,\gamma(u),$$

missä α ja γ ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ polkuja.

a) Osoita, että viivoitinpinnan Gaussin kaarevuus on kaikkialla ei-positiivinen.
b) Osoita, että edellisen tehtävän pinta on viivoitinpinta.

3. Osoita, että jos sileä pinta on parametrisoitavissa polun päällä olevana kartiona (ks. H 4/T 7, $\varphi(t,v) = (1-v)\,p + v\,(x_1(t), x_2(t), 0)$), niin pinnan Gaussin kaarevuus häviää. [Vihje: $a \cdot (a \times b) = 0$ kaikille a, $b \in \mathbb{R}^3$.]

4. Määrää kaikki parametrisoidunt pyödähdyspinnat, joiden Gaussin kaarevuus häviää identtisesti.

5. Määrää ruuvipinnan $\varphi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t,\theta) := (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$, Gaussin kaarevuus ja keskikaarevuus.

6. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, S_p pinnan Weingartenin kuvaus, $K(p)$ pinnan Gaussin kaarevuus ja $H(p)$ pinnan keskikaarevuus pisteessä p.
Osoita, että

$$S_p(v) \times S_p(w) = K(p)\,v \times w \quad \text{ja} \quad S_p(v) \times w + v \times S_p(w) = 2H(p)\,v \times w$$

kaikille v, $w \in T_p(\mathcal{M})$.
[Vihje: Väite riittää osoittaa oikeaksi, kun v ja w ovat lineaarisestri riippumattomat. Miksi?]

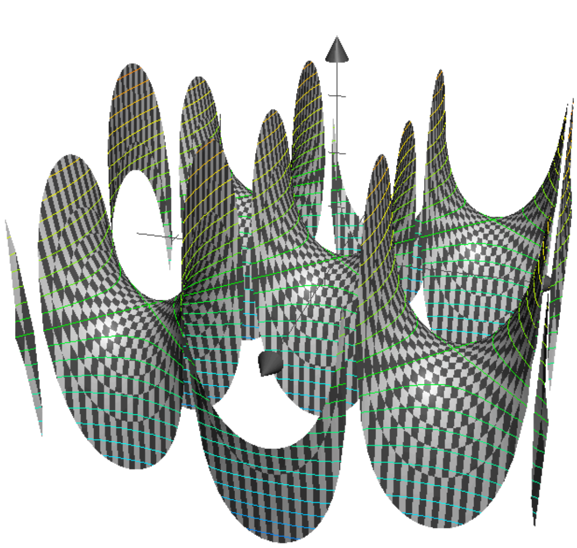
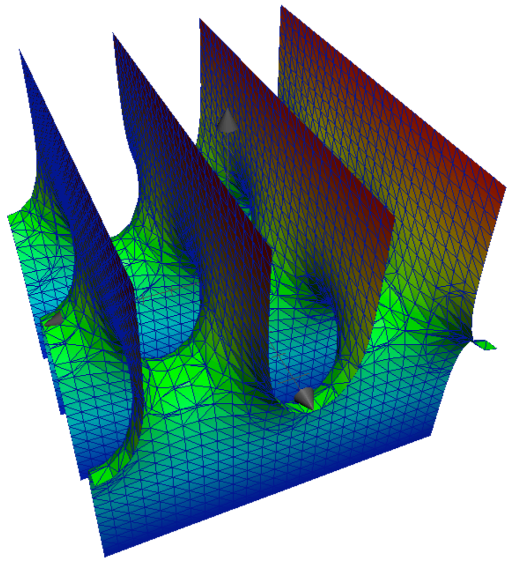
7. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ pinnan pääkaarevuudet pisteessä p sekä $e_1(p)$, $e_2(p) \in T_p(\mathcal{M})$ pinnan (ortonormaalit) pääkaarevuussuunnat pisteessä p. Olkoot $H(p)$ pinnan keskikaarevuus pisteessä p ja $k(v)$ pinnan normaalikaarevuus yksikkövektorin $v \in T_p(\mathcal{M})$ suuntaan. Asetetaan

$$e(\theta) := \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p).$$

Osoita, että

$$H(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(e(\theta))\,d\theta.$$

8. Osoita, että yhtälö $e^z \cos x = \cos y$ määrittelee sileän pinnan $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$.
Huomaa, että pinta $\mathcal{M}$ koostuu kahdesta osasta: ehdon $\cos y / \cos x > 0$ määräämän "shakkiruudukon" päällä olevasta funktion $f(x, y) = \log(\cos y / \cos x)$ kuvaajasta; sekä z-akselin suuntaisista suorista, jotka leikkaavat xy-tason pisteissä, joissa $\cos x = \cos y = 0$. Tämä pinta tunnetaan nimellä *Scherkin minimipinta*.

***9.** (Merkinnät kuten tehtävässä 6.) Olkoot $\psi \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Asetetaan $\theta_j := \psi + 2\pi j/n$, kun $0 \leq j \leq n-1$.
Osoita, että

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} k(e(\theta_j)).$$

***10.** Funktion $f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ avoin) kuvaajalle voidaan johtaa seuraavat kaavat:

$$E = 1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad G = 1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2,$$

$$e = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)^{1/2}}, \quad f = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}}{\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)^{1/2}}, \quad g = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)^{1/2}},$$

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\big)^2}{\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)^2}, \quad H = \frac{\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)^2\Big)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\Big(1 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)^2\Big)^{3/2}}.$$

Osoita, että Scherkin minimipinnan keskikaarevuus on identtisesti nolla.

Yleisesti: pinta, jonka keskikaarevuus on identtisesti nolla, on *minimipinta*.

Huomio. Pääsiäisen takia luentoja ei ole 29.3., 31.3. ja 5.4. eikä harjoituksia 30.3. Harjoitukset 6.4. ja luento 7.4. siirretään seuraavalle viikolle (=13.4. ja 14.4.).