JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaaligeometrian alkeet
Harjoitukset 7 16.3.2010

Jatkuu. . . ↻

1. Olkoot $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jonka matriisi standardikannan $\{e_1, e_2\}$ suhteen on $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Olkoot $f_1 := e_1$ ja $f_2 := e_1 + e_2$.

a) Määrää lineaarikuvauksen L matriisi kannan $\{f_1, f_2\}$ suhteen.

b) Määrää kannasta $\{f_2, f_1\}$ (tässä järjestyksessä) Gramin ja Schmidtin ortogonalisointimenetelmällä saatava ortonormeerattu kanta $\{g_1, g_2\}$.

c) Määrää lineaarikuvauksen L matriisi kannan $\{g_1, g_2\}$ suhteen.

2. (Merkinnät: H 4/T 5, H 5/T 4 ja H 6/T 6.) Osoita, että pituuspiirit $t \mapsto \varphi(t, \theta)$ ja leveyspiirit $\theta \mapsto \varphi(t, \theta)$ ovat pinnan pääkaarevuussuuntia, ja että pinnan pääkaarevuudet näihin suuntiin ovat

$$k_1 = \frac{x_1'(t)\, x_2''(t) - x_2'(t)\, x_1''(t)}{\left(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \varkappa(t) \quad \text{ja} \quad k_2 = \frac{x_2'(t)}{x_1(t)\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}}.$$

3. (Jatkoa.)

a) Osoita, että pyörähdyspinnan Gaussin kaarevuus pisteessä $\varphi(t, \theta)$ on

$$K = \frac{x_2'(t)}{x_1(t)} \frac{x_1'(t)\, x_2''(t) - x_2'(t)\, x_1''(t)}{\left(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2\right)^2}.$$

b) Osoita, että jos polun (x_1, x_2) vauhti on yksi, niin $K = -\dfrac{x_1''(t)}{x_1(t)}$.

4. (Jatkoa.) Määrää pääkaarevuudet ja Gaussin kaarevuus funktion f kuvaajan määräämälle pyörähdyspinnalle. (Tässä $(x_1(t), x_2(t)) = (f(t), t)$ ja $f > 0$).

Osoita, että tämän pyörähdyspinnan keskikaarevuus on nolla, jos ja vain jos f toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$(*) \qquad \frac{f''(t)}{\left(1 + f'(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{f(t)\left(1 + f'(t)^2\right)^{1/2}} \quad \text{eli} \quad f(t)\, f''(t) = 1 + f'(t)^2.$$

Osoita, että kaikille $a > 0$ funktio f, $f(t) := \frac{1}{a}\cosh(a\,t)$, toteuttaa differentiaaliyhtälön $(*)$. Tämän funktion f kuvaajaa kutsutaan *ketjukäyräksi* ja sen määräämää pyörähdyspintaa *katenoidiksi*.

5. Olkoot $a > 0$ ja $\alpha := (x_1, x_2)\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, [1]

$$\begin{cases} x_1(t) := a\, e^{-t/a}, \\ x_2(t) := \displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2s/a}}\, ds. \end{cases}$$

Osoita, että

a) polun α vauhti on yksi;

[1] Esiintyvä integraali voidaan laskea alkeisfunktioiden avulla: $\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2s/a}}\, ds = -\,a\, e^{-t/a}\sqrt{e^{2t/a} - 1} + a\,\log(e^{t/a} + \sqrt{e^{2t/a} - 1}) = -a\sqrt{1 - e^{-2t/a}} + a\,\operatorname{arcosh}(e^{t/a})$.

b) pisteen $\alpha(t)$ sekä polun α pisteeseen $\alpha(t)$ piirretyn tangentin ja x_2-akselin leikkauspisteen välisen janan pituus on vakio a.

Polku α on nimeltään *vetokäyrä* (lat. *tractrix*).

6. (Jatkoa.) Olkoon $\varphi\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ vetokäyrän α määräämä pyörähdyspinta.

Osoita, että tämän pinnan Gaussin kaarevuus on $-1/a^2$. Tätä pintaa kutsutaan *pseudopalloksi*. (Muista: a-säteisen pallonpinnan Gaussin kaarevuus on $1/a^2$.)

7. Olkoon $\varphi\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ profiilikäyrän $(x_1,x_2)\colon I\to\mathbb{R}^2$, missä $x_1(t)>0$ kaikille $t\in I$, määräämä parametrisoitu pyörähdyspinta, $\varphi(t,\theta) := (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t))$.

Määrää tikun φ ensimmäisen perusmuodon kertoimet.

8. Olkoot $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^3$ sileä pinta ja $\varphi\colon\mathcal{U}\to\mathcal{M}$ sen lokaali parametriesitys. Oletetaan, että tilkun φ koordinaattikäyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, ja että toisen perusmuodon kerroin $f=0$.

Osoita, että pinnan $\mathcal{M}$ Weingartenin kuvauksella $S_{\varphi(u)}$ on ominaisvektorit $E_1^\varphi(u)$ ja $E_2^\varphi(u)$. Määrää vastaavat ominaisarvot.