JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaaligeometrian alkeet
Harjoitukset 11 27.4.2010

Jatkuu. . . ↻

1. Määrää annettuja pisteitä p, $q \in S^2$ yhdistävä geodeettinen polku $\alpha\colon \mathbb{R} \to S^2$.
[Vihje: Pallon positiivivauhtiset geodeettiset polut ovat muotoa (H 10/T 1)

$$\alpha(t) = (\cos at)p + \tfrac{1}{a}(\sin at)v,$$

missä $a = \|v\| > 0$ ja $v \in T_p(S^2)$ on polun α nopeus hetkellä $t = 0$. Aluksi kannattaa määrätä pisteiden p ja q geodeettinen etäisyys δ. Voit olettaa, että p ja q eivät ole antipodaadiset, t.s. $q \neq -p$. Huomaa, että ongelma on "kaksiulotteinen"; geodeettinen polku on pisteiden p, q ja origon määräämän tason ja pallon leikkauskäyrä.]

2. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ C^1-polku ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä pitkin polkua α. Olkoot $h\colon J \to I$ parametrinvaihtokuvaus, $\beta := \alpha \circ h$ ja $\vec{W} := \vec{V} \circ h$.

Osoita, että $\vec{W}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua β, jos ja vain jos $\vec{V}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua α.

Päättele tämän avulla:

a) yhdensuuntaissiirto pisteestä p pisteeseen q pitkin polkua α on riippumaton polun α suunnan säilyttävästä parametrisoinnista;
b) yhdensuuntaissiirto pisteestä q pisteeseen p saadaan yhdensuuntaissiirrosta pisteestä p pisteeseen q vaihtamalla polun α suunta (t.s. tekemällä suunnan kääntävä parametrinvaihto).

3. Olkoot $(\mathcal{M}_1, \vec{N}_1)$ ja $(\mathcal{M}_2, \vec{N}_2)$ suunnistettuja pintoja, jotka sivuavat toisiaan pitkin C^1-polkua $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$. Tarkemmin: $\alpha(t) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ kaikille $t \in I$ ja $T_{\alpha(t)}(\mathcal{M}_1) = T_{\alpha(t)}(\mathcal{M}_2)$ kaikille $t \in I$.

Osoita, että jos pinnan $\mathcal{M}_1$ tangenttivektorikenttä $\vec{V}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua α pinnan $\mathcal{M}_1$ suhteen, niin $\vec{V}$ on yhdensuuntainen pinnan $\mathcal{M}_2$ suhteen.

Anna esimerkki tämänkaltaisesta tilanteesta.

4. (Jatkoa.) Osoita, että jos α on pinnan $\mathcal{M}_1$ geodeettinen polku, niin α on myös pinnan $\mathcal{M}_2$ geodeettinen polku.

5. Olkoot $p := (0, 0, 1)$ pallon S^2 pohjoisnapa ja v, $w \in T_p(S^2)$ siten, että $\|v\| = \|w\|$. Osoita, että on olemassa umpinainen paloittain C^1-polku $\alpha\colon [a, b] \to S^2$ siten, että $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ ja $\mathbb{P}_\alpha(v) = w$.
[Vihje: Käytä geometrisia perusteluja (lause 10.7); pituuspiirit pohjoisnavalta etelänavalle ja päiväntasaaja riittänevät.]

6. Määrää sileän pyöhdyspinnan $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t, \theta) = (x_1(t) \cos\theta, x_1(t) \sin\theta, x_2(\theta)),$$

ensimmäisen perusmuodon kertoimet ja Christoffelin (toisen lajin) symbolit.

Määrää myös tilkun φ geodeettisten polkujen $\alpha(t) = \varphi(u_1(t), u_2(t))$ differentiaaliyhtälö.

7. Olkoon $\varphi\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$,

$$\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta, 0).$$

Määrää tilkun φ ensimmäisen perusmuodon kertoimet ja osoita, että φ on (jonkin sileän pinnan) Clairaut'n r-tilkku.

Määrää tilkun φ geodeettisten polkujen $\alpha(t)=\varphi(u_1(t),u_2(t))$ differentiaaliyhtälö, ja ratkaise se.

Kurssin Differentiaaligeometrian alkeet tentit ovat 5.5. ja 19.5.
Lisäksi kesällä järjestetään yksi tentti (tarpeen mukaan).

Harjoitukset 8 käsitellään keskiviikkona 28.4. luentoaikana klo 14–16 salissa MaD259.

***8.** Osoita, että sileän polun α geodeettinen kaarevuus on

$$\varkappa_g(t) = \frac{(\mathbb{D}_t\alpha')\cdot J_{\alpha(t)}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

***9.** Olkoot $(\mathcal{M},\vec N)$ suunnistettu pinta, $\alpha\colon I\to\mathcal{M}$ C^1-polku, $\vec V$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä pitkin polkua α ja S pinnan $\mathcal{M}$ Weingartenin kuvaus. Osoita, että

$$\mathbb{D}_t\vec V = \vec V'(t) + \big(\vec V(t)\cdot S_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\big)\,\vec N(\alpha(t)).$$

***10.** Olkoot $\varphi=\varphi(\theta,t)$ pallon S^2 pallokoordinaattiparametrisointi, $ds^2 = E\,d\theta^2 + 2F\,d\theta\,dt + G\,dt^2$ tilkun φ ensimmäinen perusmuoto, β_t tilkun φ t. leveyspiiri,

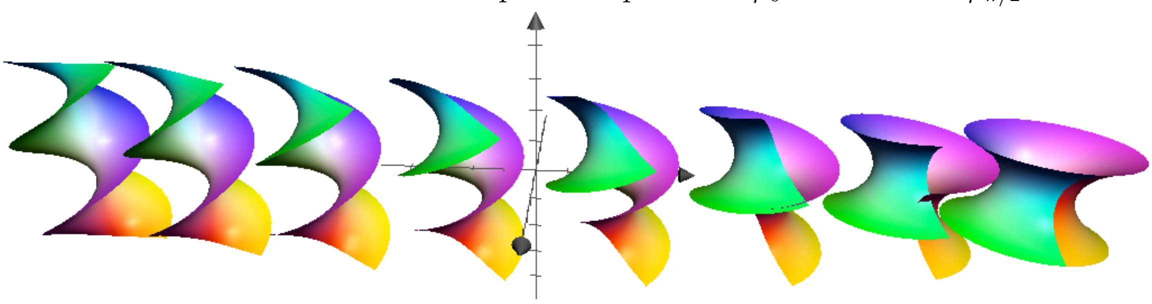
$$\beta_t(\theta) = (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, \sin t),$$

ja $E_2 := \partial_2\varphi/\sqrt{G}$.

Osoita, että

$$\mathbb{D}_\theta\beta_t = \cos t\sin t\,E_2(\theta,t).$$

Lokaalisti isometrinen isotopia ruuvipinnasta φ_0 katenoidiksi $\varphi_{\pi/2}$:



$$\varphi_t(u,v) = \cos t\,\big(\sinh v\sin u, -\sinh v\cos u, u\big) + \sin t\,\big(\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, v\big)$$
$$0<u<2\pi,\ \ -1<v<1,\ \ t=0\ldots\tfrac{\pi}{2}$$

Differentiaaligeometrian alkeet
Täydentäviä tehtäviä

Jatkuu... ↻

***1.** Suoralla on parametriesitys $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := p + tu$, missä p, $u \in \mathbb{R}^2$ ja $u \neq 0$. Tälle parametrisoinnille kiihtyvyys $\alpha''(t) = 0$. Anna esimerkki polun α uudelleenparametrisaatiosta β, jolle kiihtyvyys $\beta''(t)$ ei ole identtisesti nolla.

Osoita suoraan laskemalla, että polun α jokaisen uudelleenparametrisaation β kaarevuus on identtisesti nolla.

***2.** Olkoot $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ yksikkövauhtinen C^3-polku, jonka kaarevuus $\varkappa_3$ on aidosti positiivinen, τ polun α kierevyys, T yksikkötangenttivektorikenttä, N päänormaali ja B sivunormaali. Olkoon $t_0 \in (a,b)$. Asetetaan $r := 1/\varkappa_3(t_0)$, $q := \alpha(t_0) + r\,N(t_0)$ ja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(t) := \|\alpha(t) - q\|^2 - r^2$.

Osoita, että $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) = 0$ ja $f''(t_0) = 0$.

***3.** Määrää logaritmiselle spiraalille, jonka esitys napakoordinaattien avulla on $r(\theta) := a\,e^{k\theta}$ ($a > 0$ ja $k \neq 0$ vakioita), kaarenpituusparametri ja kaarevuus muuttujan θ funktioina sekä kaarevuus kaarenpituuden funktiona.

***4.** a) Olkoon $\varkappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varkappa(s) := 1/(s+1)$. Määrää lauseen 3.4 todistuksen mukainen polku α, jonka kaarevuuus on $\varkappa$. Oleta, että $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$.

b) Olkoot $k > 0$, $\varrho \in \mathbb{R}$, ja $\varkappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varkappa(s) := 1/(k\,s + \varrho)$. Määrää lauseen 3.4 todistuksen mukainen polku α, jonka kaarevuuus on $\varkappa$. Oleta, että $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$.

***5.** Olkoon $\varphi\colon (0,\infty) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta, \tfrac{1}{2}\,r^2\sin(2\theta)).$$

Määrää tilkun φ määräämän pinnan ensimmäisen ja toisen perusmuodon kertoimet, sekä sen Gaussin kaarevuus ja keskikaarevuus.

***6.** Osoita, että $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) := \Big(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\Big),$$

on sileä yksikköympyrän $S^1 = \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1^2 + p_2^2 = 1\}$ parametrisointi. Mikä on polun α jälki?

***7.** Olkoot $\alpha = (x_1,x_2)\colon I \to \mathbb{R}^2$ yksikkövauhtinen C^1-polku ja $t_0 \in I$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = \alpha(t_0)$. Asetetaan

$$\theta(t) := \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \big(-x_1'(\tau)x_2(\tau) + x_2'(\tau)x_1(\tau)\big)d\tau.$$

Osoita, että θ on jatkuvasti derivoituva ja $(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = \alpha(t)$ kaikille $t \in I$. [Vihje: Aseta $\beta(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ ja osoita, että $\beta'(t) \equiv \alpha'(t)$ ja $\beta(t_0) = \alpha(t_0)$.]

***8.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, $k_1(p)$ ja $k_2(p)$ pinnan pääkaarevuudet pisteessä p sekä $e_1(p)$, $e_2(p) \in T_p(\mathcal{M})$ pinnan (ortonormaalit) pääkaarevuussuunnat pisteessä p. Olkoot $H(p)$ pinnan keskikaarevuus pisteessä p, $k(v)$ pinnan normaalikaarevuus yksikkövektorin $v \in T_p(\mathcal{M})$ suuntaan ja

$$e(\theta) := \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p).$$

Olkoot $\psi \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Asetetaan $\theta_j := \psi + \pi j/n$, kun $0 \leq j \leq n-1$. Osoita, että

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} k(e(\theta_j)).$$

***9.** Osoita, että yhtälö $\sin z = \sinh x \sinh y$ määrittelee sileän suunnistuvan pinnan $\mathcal{M}$. [Voidaan osoittaa, että pinnan $\mathcal{M}$ keskikaarevuus on identtisesti nolla.]

***10.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p_0 \in \mathcal{M}$ ja $\alpha \colon I \to \mathcal{T}$ sileä C^2-polku. Asetetaan $\vec{N}_0 = \vec{N}(p_0)$, $\mathcal{T} := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p \cdot N_0 = 0\}$ ja $\alpha_0 \colon I \to \mathcal{T}$,

$$\alpha_0(t) := \alpha(t) - (\alpha(t) \cdot N_0)N_0.$$

Polku α_0 on polun α ortogonaaliprojektio pinnan $\mathcal{M}$ kiinteälle tangenttitasolle $T_{p_0}(\mathcal{M})$.

Osoita, että polun α geodeettinen kaarevuus on sama kuin tason $\mathcal{T}$ polun α_0 tasokäyräkaarevuus. Polun α_0 tasokäyräkaarevuudeksi on luonnollista asettaa $\varkappa = (\alpha'' \cdot J_0(\alpha'))/\|\alpha'\|^3$, missä $J_0(v) := \vec{N}_0 \times v$.

***11.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $\alpha \colon I \to \mathcal{M}$ C^1-polku ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä.

Osoita, että jos $\|\vec{V}(t)\| = 1$ kaikille $t \in I$, niin vektorikentän $\vec{V}$ kovariantti derivaatta $\mathbb{D}_t\vec{V}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{V}(t)$ vastaan.

***12.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $p \in \mathcal{M}$, $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ ja $\alpha \colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ maksimaalinen geodeettinen polku pisteen p kautta alkunopeudella v.

Olkoon $\beta \colon J \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ geodeettinen polku siten, että $\beta(t_0) = p$ ja $\beta'(t_0) = v$ jollekin $t_0 \in J$. Osoita, että $\beta(t) = \alpha(t - t_0)$ kaikille $t \in J$.

***13.** (Jatkoa.) Olkoon $\beta \colon J \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ geodeettinen polku siten, että $\beta(t_0) = \beta(0)$ ja $\beta'(t_0) = \beta'(0)$ jollekin $t_0 \in J$, $t_0 \neq 0$.

Osoita, että $\beta(t + t_0) = \beta(t)$ kaikille $t \in J$, joille $t + t_0 \in J$. [Polku β on siis jaksollinen.]

***14.** Suunnistettu pinta $(\mathcal{M}, \vec{N})$ on *geodeettisesti täydellinen*, jos sen jokaisen maksimaalisen geodeettisen polun määrittelyväli on koko $\mathbb{R}$.

Mitkä seuraavista pinnoista ovat geodeettisesti täydellisiä:

a) x_1x_2-taso $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid p_3 = 0\}$;
b) x_1x_2-taso, josta puuttuu origo $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid p_3 = 0 \text{ ja } p_1^2 + p_2^2 > 0\}$;
c) pallo S^2;
d) pallo, josta pohjoisnapa puuttuu $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$;
e) sylinteri $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 = 1\}$;
f) sylinteri, josta puuttuu suora $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 = 1 \text{ ja } p_1 \neq 1\}$?

***15.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä. Kaikille $p \in \mathcal{M}$ ja $v_p = (p; v) \in T_p(\mathcal{M})$ asetetaan $\mathbb{D}_{v_p}\vec{V} := D_{v_p}\vec{V} - \big(D_{v_p}\vec{V} \cdot \vec{N}(p)\big)\,\vec{N}(p)$, *tangenttivektorikentän* $\vec{V}$ *kovariantti derivaatta vektorin* v_p *suuntaan pisteessä* p.

Osoita, että kun $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$ on C^1-polku, niin $\mathbb{D}_t(\vec{V} \circ \alpha) = \mathbb{D}_{(\alpha(t);\alpha'(t))}\vec{V}$.

Osoita, että C^1-tangenttivektorikentille $\vec{V}$ ja $\vec{W}$ ja C^1-funktiolle $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ on voimassa

a) $\mathbb{D}_{v_p}(\vec{V} + \vec{W}) = \mathbb{D}_{v_p}\vec{V} + \mathbb{D}_{v_p}\vec{W}$;
b) $\mathbb{D}_{v_p}(f\,\vec{V}) = (D_{v_p}f)\,\vec{V}(p) + f(p)\,\mathbb{D}_{v_p}\vec{V}$;
c) $D_{v_p}(\vec{V} \cdot \vec{W}) = (\mathbb{D}_{v_p}\vec{V}) \cdot \vec{W}(p) + \vec{V}(p) \cdot (\mathbb{D}_{v_p}\vec{W})$.

***16.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $\vec{X}$ pinnan $\mathcal{M}$ C^1-tangenttivektorikenttä, $p \in \mathcal{M}$, $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ ja S_p pinnan $\mathcal{M}$ Weingartenin kuvaus pisteessä p. Osoita, että

$$\mathbb{D}_{v_p}\vec{X} = D_{v_p}\vec{X} + \big(\vec{X}(p) \cdot S_p(v_p)\big)\,\vec{N}(p).$$

***17.** Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ sen lokaali parametrisointi ja $\vec{N}^\varphi = \vec{N} \circ \varphi$ tilkun φ yksikkönormaali. Merkitään ensimmäisen perusmuodon kertoimia $g_{1,1} := E$, $g_{1,2} := g_{2,1} := F$ ja $g_{2,2} := G$ sekä vastaavasti toisen perusmuodon kertoimia $s_{1,1} := e$, $s_{1,2} := s_{2,1} := f$ ja $s_{2,2} =: g$.

Osoita, että

$$g_{j,k} = \partial_j\varphi \cdot \partial_k\varphi, \quad s_{j,k} = \partial_j\partial_k\varphi \cdot \vec{N}^\varphi = -\partial_k\varphi \cdot \partial_k\vec{N}^\varphi, \quad j,k \in \{1,2\}.$$

Tarkista, että näillä merkinnöillä Gaussin yhtälöt saavat muodon

$$\partial_i\partial_j\varphi = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{i,j}\,\partial_k\varphi + s_{i,j}\,N^\varphi, \quad i,j \in \{1,2\},$$

missä $\Gamma^k_{i,j}$ ovat tilkun φ toisen lajin Christoffelin symbolit.

Osoita myös, että Weingartenin yhtälöt saavat muodon

$$-S(\partial_i\varphi) = \partial_i N^\varphi = \sum_{k=1}^{2} a_{k,i}\,\partial_k\varphi, \quad i \in \{1,2\},$$

missä matriisille $\left[\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right]$ on voimassa $-\left[\begin{smallmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{smallmatrix}\right]$. Siis

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{bmatrix},$$

missä $\left[\begin{smallmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{smallmatrix}\right]$ on matriisin $\left[\begin{smallmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{smallmatrix}\right]$ käänteismatriisi (merkintätapa on varsin perinteinen). Huomaa, että $\sum_{l=1}^{2} g^{j,l}g_{l,k} = \delta_{j,k} =$ Kroneckerin delta-symboli $= \left\{\begin{smallmatrix} 0, & \text{jos } j \neq k, \\ 1, & \text{jos } j = k. \end{smallmatrix}\right.$

***18.** (Jatkoa.) Asetetaan $[i\ j,k] := \partial_i\partial_j\varphi\cdot\partial_k\varphi$ (Christoffelin ensimmäisen lajin symbolit).

Osoita, että

$$[i\ j,k] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_k}\right),$$

$$[i\ j,k] = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{i,j}\, g_{l,k},$$

$$\Gamma^l_{i,j} = \sum_{k=1}^{2} [i\ j,k]\, g^{k,l}.$$

***19.** (Jatkoa.) Pinnan $\mathcal{M}$ ns. *Riemannin tensori* pisteessä p on kuvaus

$$R\colon T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M}),$$
$$R(u,v,w) := (S(v)\cdot w)\, S(u) - (S(u)\cdot w)\, S(v).$$

Osoita, että

$$R(E_i, E_j, E_k)\cdot E_l = s_{k,i}\, s_{l,j} - s_{k,j}\, s_{l,i},$$

missä $E_j := \partial_j \varphi$.

Asetetaan $R_{i,j,k,l} := R(E_i, E_j, E_k)\cdot E_l$ (*Riemannin toisen lajin symbolit*).

Osoita, että pinnan $\mathcal{M}$ Gaussin kaarevuudelle on

$$K = \frac{R_{1,2,1,2}}{g},$$

missä $g := \det \left[\begin{smallmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2}\end{smallmatrix}\right]$.

***20.** (Jatkoa.) Asetetaan $R^p_{i,j,k} = \sum_{l=1}^{2} R_{i,j,k,l}\, g^{l,p}$ (Riemannin ensimmäisen lajin symbolit).

Osoita, että

$$R_{i,j,k,l} = \sum_{p=1}^{2} R^p_{i,j,k}\, g_{p,l},$$

$$R_{m,i,j,k} = \partial_j[i\ k,m] - \partial_k[i\ j,m] + \sum_{l=1}^{2} (\Gamma^l_{i,j}\,[m\ k,l] - \Gamma^l_{i,k}\,[m\ j,l],$$

$$R^p_{i,j,k} = \partial_j \Gamma^p_{i,k} - \partial_i \Gamma^p_{j,k} + \sum_{l=1}^{2} (\Gamma^l_{i,k}\,\Gamma^p_{l,j} - \Gamma^l_{j,k}\,\Gamma^p_{l,i}).$$