LUKU 11

Christoffelin symbolit

11.1. Geodeettisuus ja kovariantti derivaatta

Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ sen lokaali parametriesitys. Muistettakoon, että tilkun φ ensimmäisen ja toisen perusmuodon kertoimet ovat

$$
\begin{aligned}
E &= \|\partial_1\varphi\|^2, \quad F = \partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi, \quad G = \|\partial_2\varphi\|^2,\\
e &= N^\varphi \cdot \partial_1^2\varphi, \quad f = N^\varphi \cdot \partial_1\partial_2\varphi, \quad g = N^\varphi \cdot \partial_2^2\varphi,
\end{aligned}
$$

missä N^φ on tilkun φ yksikkönormaali.

Toisen perusmuodon kertoimet ovat siis toisen kertaluvun osittaisderivaattojen $\partial_k\partial_l\varphi$ koordinaatit normaalin N^φ suuntaan. Annetaan tangenttivektorien $E_j^\varphi = \partial_j\varphi$ suuntaisille koordinaateille nimet $\Gamma_{k,l}^j$, t.s. olkoot $\Gamma_{k,l}^j\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funktiot, joille

$$
\begin{cases}
\partial_1\partial_1\varphi = \Gamma_{1,1}^1\, E_1^\varphi + \Gamma_{1,1}^2\, E_2^\varphi + e\, N^\varphi\\
\partial_1\partial_2\varphi = \Gamma_{1,2}^1\, E_1^\varphi + \Gamma_{1,2}^2\, E_2^\varphi + f\, N^\varphi\\
\partial_2\partial_2\varphi = \Gamma_{2,2}^1\, E_1^\varphi + \Gamma_{2,2}^2\, E_2^\varphi + g\, N^\varphi
\end{cases}
\tag{11.1}
$$

Symmetrian vuoksi asetetaan vielä

$$
\Gamma_{2,1}^1 := \Gamma_{1,2}^1 \quad \text{ja} \quad \Gamma_{2,1}^2 := \Gamma_{1,2}^2.
$$

Funktiot $\Gamma_{k,l}^j$ ovat *tilkun φ Christoffelin (toisen lajin) symbolit.*[2] Christoffelin symbolit määritteleviä yhtälöitä (11.1) kutsutaan usein *Gaussin yhtälöiksi.*

LAUSE 11.1. *Olkoon $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ sileä tilkku. Tällöin*

$$
\begin{cases}
\Gamma_{1,1}^1\, E + \Gamma_{1,1}^2\, F = \frac{1}{2}\,\partial_1 E\\
\Gamma_{1,2}^1\, E + \Gamma_{1,2}^2\, F = \frac{1}{2}\,\partial_2 E\\
\Gamma_{2,2}^1\, E + \Gamma_{2,2}^2\, F = \partial_2 F - \frac{1}{2}\,\partial_1 G
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\Gamma_{1,1}^1\, F + \Gamma_{1,1}^2\, G = \partial_1 F - \frac{1}{2}\,\partial_2 E\\
\Gamma_{1,2}^1\, F + \Gamma_{1,2}^2\, G = \frac{1}{2}\,\partial_1 G\\
\Gamma_{2,2}^1\, F + \Gamma_{2,2}^2\, G = \frac{1}{2}\,\partial_2 G
\end{cases}
$$

TODISTUS. Lasketaan ensimmäisen Gaussin yhtälön (11.1) sisätulo puolittain tangenttivektorin E_1^φ suhteen. Saadaan

$$
\partial_1^2\varphi \cdot E_1^\varphi = \Gamma_{1,1}^1\, \|E_1^\varphi\|^2 + \Gamma_{1,1}^2\, E_2^\varphi \cdot E_1^\varphi = \Gamma_{1,1}^1\, E + \Gamma_{1,1}^2\, F.
$$

Toisaaalta,

$$
\partial_1 E = \partial_1(\partial_1\varphi \cdot \partial_1\varphi) = 2\,\partial_1^2\varphi \cdot \partial_1\varphi,
$$

joten ensimmäinen väitetyistä yhtälöistä seuraa. Muut todistetaan vastaavasti. □

[1] Viimeksi muutettu 15.4.2010.

[2] Christoffelin oma merkintä oli $\left\{ {k\ l \atop j} \right\}$. *Christoffelin ensimmäisen lajin symbolit* ovat $[i\ j, k] = \partial_i\partial_j\varphi \cdot \partial_k\varphi$. Christoffelin oma merkintä ensimmäisen lajin symboleille oli $\left[{i\ j \atop k} \right]$.

Huomautus 11.2. Christoffelin symbolit voidaan ratkaista ensimmäisen perusmuodon kertoimien ja niiden osittaisderivaattojen avulla edellisen lauseen avulla. Esimerkiksi $\Gamma^1_{1,1}$ ja $\Gamma^2_{1,1}$ saadaan vasemman ja oikean puolen yhtälöryhmien ensimmäisten yhtälöiden avulla; muista, että $E\,G - F^2 > 0$.

Lause 11.3. *Olkoot* $(\mathcal{M}, \vec{N})$ *suunnistettu pinta ja* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ *sen lokaali parametriesitys siten, että tilkun* φ *yksikkönormaalille on* $N^\varphi = N \circ \varphi$.

Olkoon $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathcal{U}$ C^2*-polku siten, että* $\alpha(t) := \varphi(u(t))$ *on pinnan* $\mathcal{M}$ *geodeettinen polku.*

Tällöin u_1 *ja* u_2 *toteuttavat differentiaaliyhtälöparin*

$$\begin{cases} u_1'' + \Gamma^1_{1,1}\,(u_1')^2 + 2\,\Gamma^1_{1,2}\,u_1'\,u_2' + \Gamma^1_{2,2}\,(u_2')^2 = 0 \\ u_2'' + \Gamma^2_{1,1}\,(u_1')^2 + 2\,\Gamma^2_{1,2}\,u_1'\,u_2' + \Gamma^2_{2,2}\,(u_2')^2 = 0 \end{cases}$$

missä Christoffelin symbolien $\Gamma^j_{k,l}$ *arvot lasketaan pisteessä* $u(t)$.

Todistus. Derivoimalla (yksikertaisuuden vuoksi argumentti $u(t)$ funktion φ osittaisderivaatoista ja t funktioiden u_1 ja u_2 derivaatoista on jätetty merkitsemättä)

$$\begin{aligned} \alpha' &= \partial_1\varphi\,u_1' + \partial_2\varphi\,u_2' \\ \alpha'' &= \partial_1^2\varphi\,(u_1')^2 + \partial_2\partial_1\varphi\,u_2'\,u_1' + \partial_1\varphi\,u_1'' \\ &\quad + \partial_1\partial_2\varphi\,u_1'\,u_2' + \partial_2^2\varphi\,(u_2')^2 + \partial_2\varphi\,u_2''. \end{aligned}$$

Kun tilkun φ toisen kertaluvut osittaisderivaatat esitetään Christoffelin symbolien avulla (Gaussin yhtälöt (11.1)), saadaan

$$\begin{aligned} \alpha'' &= (\Gamma^1_{1,1}\,E_1^\varphi + \Gamma^2_{1,1}\,E_2^\varphi + e\,N^\varphi)\,(u_1')^2 \\ &\quad + (\Gamma^1_{1,2}\,E_1^\varphi + \Gamma^2_{1,2}\,E_2^\varphi + f\,N^\varphi)\,u_2'\,u_1' + \partial_1\varphi\,u_1'' \\ &\quad + (\Gamma^1_{1,2}\,E_1^\varphi + \Gamma^2_{1,2}\,E_2^\varphi + f\,N^\varphi)\,u_1'\,u_2' \\ &\quad + (\Gamma^1_{2,2}\,E_1^\varphi + \Gamma^2_{2,2}\,E_2^\varphi + g\,N^\varphi)\,(u_2')^2 + \partial_2\varphi\,u_2''. \\ &= \big(u_1'' + \Gamma^1_{1,1}\,(u_1')^2 + 2\,\Gamma^1_{1,2}\;u_1'\,u_2' + \Gamma^1_{2,2}\,(u_2')^2\big)\,E_1^\varphi \\ &\quad + \big(u_2'' + \Gamma^2_{1,1}\,(u_1')^2 + 2\,\Gamma^2_{1,2}\;u_1'\,u_2' + \Gamma^2_{2,2}\,(u_2')^2\big)\,E_2^\varphi \\ &\quad + \big(e\,(u_1')^2 + 2\,f\;u_1'\,u_2' + g\,(u_2')^2\big)\,N^\varphi. \end{aligned}$$

Polku α on geodeettinen, jos ja vain jos kiihtyvyyden α'' tangentiaalinen komponentti häviää, t.s. jos ja vain jos vektoreiden E_1^φ ja E_2^φ kertoimina olevat termit häviävät. Tämä on yhtäpitävää sille, että väitetyt yhtälöt toteutuvat. □

Tarkastellaan seuraavaksi pinnan tangenttivektorikenttien yhdensuuntaisuutta.

Olkoot $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathcal{U}$ C^1-polku ja $\alpha(t) := \varphi(u(t))$ kuten edellä, sekä $\vec{V}$ pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α. Oletetaan, että $\vec{V}$ voidaan esittää muodossa

$$V(t) = a_1(t)\,E_1^\varphi(u(t)) + a_2(t)\,E_2^\varphi(u(t)),$$

missä a_1, $a_2\colon I \to \mathbb{R}$.

Nyt (argumentit $u(t)$ ja t jätetään taas merkitsemättä)

$$\begin{aligned}V' &= a_1'\,E_1^\varphi + a_1\,(\partial_1^2\varphi\,u_1' + \partial_2\partial_1\varphi\,u_2')\\ &\quad + a_2'\,E_2^\varphi + a_2\,(\partial_1\partial_2\varphi\,u_1' + \partial_2^2\varphi\,u_2')\end{aligned}$$

Kun toisen kertaluvut osittaisderivaatat esitetään Christoffelin symbolien avulla, saadaan

$$\begin{aligned}V' = E_1^\varphi\,&(a_1' + \Gamma_{1,1}^1\,a_1\,u_1' + \Gamma_{1,2}^1\,a_1\,u_2' + \Gamma_{1,2}^1\,a_2\,u_1' + \Gamma_{2,2}^1\,a_2\,u_2')\\ + E_2^\varphi\,&(a_2' + \Gamma_{1,1}^2\,a_1\,u_1' + \Gamma_{1,2}^2\,a_1\,u_2' + \Gamma_{1,2}^2\,a_2\,u_1' + \Gamma_{2,2}^2\,a_2\,u_2')\\ + N^\varphi\,&(e\,a_1\,u_1' + f\,a_1\,u_2' + f\,a_2\,u_1' + g\,a_2\,u_2').\end{aligned}$$

Saadaan siis

LAUSE 11.4. *Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta ja $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ sen lokaali parametriesitys siten, että tilkun φ yksikkönormaalille on $N^\varphi = N \circ \varphi$.*

Olkoot $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathcal{U}$ C^1-polku, $\alpha(t) := \varphi(u(t))$, ja

$$V(t) := a_1(t)\,E_1^\varphi(u(t)) + a_2(t)\,E_2^\varphi(u(t))$$

pinnan $\mathcal{M}$ tangenttivektorikenttä pitkin polkua α.

Tällöin $\vec{V}$ on yhdensuuntainen pitkin polkua α, jos ja vain jos funktiot a_1 ja a_2 toteuttavat lineaarisen differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{cases} a_1' + \Gamma_{1,1}^1\,a_1\,u_1' + \Gamma_{1,2}^1\,a_1\,u_2' + \Gamma_{1,2}^1\,a_2\,u_1' + \Gamma_{2,2}^1\,a_2\,u_2' = 0\\ a_2' + \Gamma_{1,1}^2\,a_1\,u_1' + \Gamma_{1,2}^2\,a_1\,u_2' + \Gamma_{1,2}^2\,a_2\,u_1' + \Gamma_{2,2}^2\,a_2\,u_2' = 0\end{cases}$$

missä Christoffelin symbolien $\Gamma_{k,l}^j$ arvot lasketaan pisteessä $u(t)$. □

11.2. Clairaut'n tilkut

MÄÄRITELMÄ 11.5. Olkoot $(\mathcal{M}, \vec{N})$ suunnistettu pinta, $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ sen lokaali parametriesitys sekä $ds^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2$ tilkun φ ensimmäinen perusmuoto.

Tilkku $\varphi = \varphi(u_1, u_2)$ on

(i) *Clairaut'n u_1-tilkku*, jos

$$F \equiv 0 \quad \text{ja} \quad \partial_2 E \equiv \partial_2 G \equiv 0.$$

(ii) *Clairaut'n u_2-tilkku*, jos

$$F \equiv 0 \quad \text{ja} \quad \partial_1 E \equiv \partial_1 G \equiv 0.$$

Tilkku $\varphi = \varphi(u_1, u_2)$ on siis Clairaut'n u_2-tilkku, jos ja vain jos koordinaattikäyrät $u_1 \mapsto \varphi(u_1, u_2)$ ja $u_2 \mapsto \varphi(u_1, u_2)$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti ja ensimmäisen perusmuodon kertoimet E ja G riippuvat vain muuttujasta u_2.

ESIMERKKEJÄ 11.6. a) Pallon S^2 tavallinen parametrisointi pallokoordinaattien avulla,

$$\varphi\colon (-\pi, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to S^2, \quad \varphi(\theta, t) := (\cos\theta\cos t, \sin\theta\cos t, \sin t),$$

on Clairaut'n t-tilkku, sillä

$$ds^2 = \cos^2 t\,d\theta^2 + dt^2.$$

b) Yleisemmin, pyörähdyspinnan parametrisointi φ,

$$\varphi(\theta, t) := (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t)),$$

on Clairaut'n t-tilkku, sillä

$$ds^2 = x_1(t)^2\, d\theta^2 + \big(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2\big)\, dt^2.$$

c) Pallon S^2 parametrisointi Mercatorin projektion avulla,

$$\varphi\colon (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to S^2, \quad \varphi(\theta, t) := (\cos\theta \operatorname{sech} t, \sin\theta \operatorname{sech} t, \tanh t),$$

on Clairaut'n t-tilkku, sillä

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 t\, d\theta^2 + \operatorname{sech}^2 t\, dt^2.$$

Tässä $\operatorname{sech} t = 1/\cosh t$.

Ensimmäisestä perusmuodosta näkyy myös, että tilkku φ on lokaalisti konforminen (vertaa stereografisen projektion konformisuuteen).

LAUSE 11.7. *Olkoon $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ Clairaut'n u_2-tilkku.*
Tällöin Christoffelin symboleille on

$$\begin{cases} \Gamma^1_{1,1} = 0 \\ \Gamma^1_{1,2} = \frac12\, \partial_2 E/E \\ \Gamma^1_{2,2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma^2_{1,1} = -\frac12\, \partial_2 E/G \\ \Gamma^2_{1,2} = 0 \\ \Gamma^2_{2,2} = \frac12\, \partial_2 G/G \end{cases}$$

TODISTUS. Seuraa suoraan lauseesta 11.7. □

SEURAUS 11.8. *Edellisen lauseen oletuksin:*
Tilkun φ polku $\alpha(t) := \varphi(u(t))$, missä $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathcal{U}$, on geodeettinen, jos ja vain jos u_1 ja u_2 toteuttavat differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{cases} u_1'' + \dfrac{\partial_2 E}{E}\, u_1'\, u_2' = 0 \\ u_2'' - \dfrac{\partial_2 E}{2\,G}\, (u_1')^2 + \dfrac{\partial_2 G}{2\,G}\, (u_2')^2 = 0 \end{cases}$$

TODISTUS. Seuraa välittömästi edellisen lauseen ja lauseen 11.3 kaavoista. □

LAUSE 11.9. *Olkoon $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ Clairaut'n u_2-tilkku. Tällöin*

(i) *jokainen u_2-koordinaaattikäyrä $u_2 \mapsto \varphi(u_1, u_2)$ on esigeodeettinen;*
(ii) *kiinteälle u_2^0 on u_1-koordinaaattikäyrä $u_1 \mapsto \varphi(u_1, u_2^0)$ geodeettinen, jos ja vain jos $\partial_2 E(u_1, u_2^0) \equiv 0$.*

TODISTUS. (i): Olkoon $\beta(t) := \varphi(u_1^0, t)$. Lasketaan aluksi

$$\begin{aligned} \beta''(t) \cdot \partial_1\varphi(u_1^0, t) &= \partial_2^2\varphi(u_1^0, t) \cdot \partial_1\varphi(u_1^0, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\partial_2\varphi(u_1^0, t) \cdot \partial_1\varphi(u_1^0, t)\Big) - \partial_2\varphi(u_1^0, t) \cdot \partial_2\partial_1\varphi(u_1^0, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(u_1^0, t) - \tfrac12\, \partial_1 G(u_1^0, t) = 0. \end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että φ Clairaut'n u_2-tilkku.

Saadun ominaisuuden nojalla kiihtyvyysvektorin $\beta''(t)$ tangentiaalinen projektio $\top_p\beta''(t)$, missä $p := \varphi(u_1^0, t)$, on kohtisuorassa vektoria $\partial_1\varphi(u_1^0, t) = E_1^\varphi(u_1^0, t)$ vastaan.

Toisaalta, ehdon $F \equiv 0$ nojalla koordinaattikäyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti eli $E_2^\varphi(u_1^0,t) \perp E_1^\varphi(u_1^0,t)$. Projektio $\top_p\beta''(t)$ on siis vektorin $E_2^\varphi(u_1^0,t)$ suuntainen, eli on olemassa funktio $f = f(t)$ siten, että

$$\top_p\beta''(t) = f(t)\,E_2^\varphi(u_1^0,t) = f(t)\,\beta'(t).$$

Lauseen 9.7 nojalla polku β on esigeodeettinen.

(ii): Oletetaan aluksi, että $\alpha(t) := \varphi(t,u_2^0)$ on geodeettinen.
Tällöin

$$\begin{aligned}\partial_2 E(t,u_2^0) &= 2\,\partial_2\partial_1\varphi(t,u_2^0)\cdot\partial_1\varphi(t,u_2^0)\\ &= 2\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\partial_2\varphi(t,u_2^0)\cdot\partial_1\varphi(t,u_2^0)\Big) - 2\,\partial_2\varphi(t,u_2^0)\cdot\partial_1^2\varphi(t,u_2^0)\\ &= 2\,\partial_1 F(t,u_2^0) - 2\,\partial_2\varphi(t,u_2^0)\cdot\alpha''(t) \equiv 0.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa polun α geodeettisuudesta: kiihtyvyysvektori $\alpha''(t)$ on kohtisuorassa erityisesti tangenttivektoria $\partial_2\varphi(t,u_2^0) = E_2^\varphi(t,u_2^0)$ vastaan.

Oletetaan kääntäen, että $\partial_2 E(u_1,u_2^0) \equiv 0$.
Tällöin

$$\begin{aligned}\partial_1^2\varphi\cdot\partial_2\varphi &= \partial_1\big(\partial_1\varphi\cdot\partial_2\varphi\big) - \partial_1\varphi\cdot\partial_1\partial_2\varphi\\ &= \partial_1 F - \tfrac12\,\partial_2 E = -\tfrac12\,\partial_2 E,\end{aligned}$$

joten erityisesti

$$\alpha''(t)\cdot\partial_2\varphi(t,u_2^0) = -\tfrac12\,\partial_2 E(t,u_2^0) = 0.$$

Toisaalta,

$$\alpha''(t)\cdot\partial_1\varphi(t,u_2^0) = \tfrac12\,\partial_1 E(t,u_2^0) = 0.$$

Siis $\alpha''(t) \perp T_{\varphi(t,u_2^0)}(\mathcal{M})$, joten α on geodeettinen. □

Edellisen lauseen nojalla pyörähdyspinnan kaikki pituuspiirit

$$t \mapsto \varphi(\theta,t) = (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t))$$

ovat esigeodeettisia ja leveyspiiri $\theta \mapsto \varphi(\theta,t)$ on geodeettinen, jos ja vain jos $x_1'(t) = 0$ (huomaa: $E(\theta,t) = x_1(t)^2$, joten $\partial_2 E(\theta,t) = 2\,x_1(t)\,x_1'(t)$).

Lause 11.10 (Clairaut). *Olkoot $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ Clairaut'n u_2-tilkku ja $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ pinnan $\mathcal{M}$ geodeettinen polku, $\beta(t) = \varphi(u(t))$, missä $u\colon I \to \mathcal{U}$.*
Olkoon $\theta = \theta(t)$ vektoreiden $\beta'(t)$ ja $E_1^\varphi(u(t))$ välinen kulma.
Tällöin

$$\sqrt{E(u(t))}\,\|\beta'(t)\|\,\cos\theta(t) \quad \textit{on vakio.}$$

Todistus. Koska $\partial_1 E \equiv 0$, saadaan seurauksen 11.8 ensimmäisen yhtälön nojalla

$$\frac{d}{dt}(E(u(t))\,u_1'(t)) = \partial_1 E\,(u_1')^2 + \partial_2 E\,u_2'\,u_1' + E\,u_1'' = 0,$$

joten on olemassa vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$E(u(t))\,u_1'(t) = c.$$

Toisaalta, koska $E_1^\varphi \cdot E_2^\varphi = F = 0$, saadaan

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| \, \cos\theta(t) &= \frac{\beta'(t) \cdot E_1^\varphi(u(t))}{\|E_1^\varphi(u(t))\|} \\ &= \frac{\big(\partial_1\varphi(u(t))\, u_1'(t) + \partial_2\varphi(u(t))\, u_2'(t)\big) \cdot E_1^\varphi(u(t))}{\|E_1^\varphi(u(t))\|} \\ &= \|E_1^\varphi(u(t))\|\, u_1'(t) = \sqrt{E(u(t))}\, u_1'(t). \end{aligned}$$

Siis

$$\sqrt{E(u(t))}\, \|\beta'(t)\| \, \cos\theta(t) = E(u(t))\, u_1'(t) = c. \qquad \square$$

Lauseen tuloksesta kannattaa huomata seuraava tärkeä erikoistapaus: Pyörähdyspinnan parametrisoinnissa φ,

$$\varphi(\theta, t) := (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t)),$$

on $E(\theta, t) = x_1(t)^2$.

Oletetaan, että $\beta = \beta(s)$ on pyöhdyspinnan geodeettinen polku (jolloin erityisesti polun β vauhti $\|\beta'(s)\|$ on vakio). Koska φ on Clairaut'n t-tilkku, saadaan

$$\sqrt{E}\, \cos\theta \quad \text{on vakio} =: c \text{ pitkin polkua } \beta,$$

missä nyt θ on polun β ja leveyspiirin $\theta \mapsto \varphi(\theta, t)$ välinen kulma.

Siis

$$x_1(t)\cos\theta = c.$$

Tässä $x_1(t)$ on pyörähdysympyrän säde pisteessä $\varphi(\theta, t)$. Koska $|\cos\theta| \le 1$, pysyy polun β jälki pinnan osajoukossa, missä $x_1(t) \ge c$ (jos $c > 0$; jos $c = 0$, on $\theta = \pi/2$, ja polku β on siis pituuspiirin suuntainen (jotka ovat geodeettisia, kunhan ovat vakiovauhtisia)).

Clairaut'n lauseen avulla pyörähdyspinnan geodeettinen polkujen käyttäytyminen voidaan selvittää melko tarkoin; ks. [**14**, osa III, s. 315–319].

LEMMA 11.11. *Olkoot $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ Clairaut'n u_2-tilkku ja $\beta\colon I \to \mathcal{M}$ yksikkövauhtinen C^2-polku siten, että $\beta(I) \subset \varphi(\mathcal{U})$.*

Olkoon $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathcal{U}$ polku, jolle $\beta(t) = \varphi(u(t))$.

Jos β on geodeettinen, niin on olemassa vakio c siten, että

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{c}{E} \\ u_2' = \pm\dfrac{\sqrt{E - c^2}}{\sqrt{E\,G}} \end{cases} \tag{11.2}$$

Kääntäen, jos (u_1, u_2) toteuttaa yhtälöparin (11.2) *ja $u_2'(t) \neq 0$, kun $t \in I$, niin β on yksikkövauhtinen geodeettinen polku.*

TODISTUS. Oletetaan, että β on geodeettinen.

Väitteen (11.2) ensimmäinen yhtälö seuraa edellisestä lauseesta (todistuksesta).

Koska $\|\beta'(t)\| = 1$ ja $F = 0$, on

$$\begin{aligned}
1 &= \beta'(t)\cdot\beta'(t)\\
&= \big(\partial_1\varphi(u(t))\,u_1'(t) + \partial_2\varphi(u(t))\,u_2'(t)\big)\cdot\big(\partial_1\varphi(u(t))\,u_1'(t) + \partial_2\varphi(u(t))\,u_2'(t)\big)\\
&= E(u(t))\,(u_1'(t))^2 + G(u(t))\,(u_2'(t))^2 = \frac{c^2}{E(u(t))} + G(u(t))\,(u_2'(t))^2.
\end{aligned}$$

Siis

$$(u_2'(t))^2 = \frac{1}{G(u(t))}\Big(1 - \frac{c^2}{E(u(t))}\Big),$$

joten jälkimmäinen yhtälö seuraa.

Oletetaan kääntäen, että yhtälöt (11.2) toteutuvat.

Ensimmäisen yhtälön nojalla (muista, että $\partial_1 E = 0$)

$$u_1''(t) = \Big(\frac{c}{E(u(t))}\Big)' = -\frac{c\,\partial_2E(u(t))\,u_2'(t)}{E(u(t))^2} = -\frac{\partial_2E(u(t))\,u_1'(t)\,u_2'(t)}{E(u(t))}. \tag{11.3}$$

Siis ensimmäinen seurauksen 11.8 yhtälöistä toteutuu.

Polun β vauhti on yksi, koska

$$\begin{aligned}
\beta'(t)\cdot\beta'(t) &= E(u(t))\,(u_1'(t))^2 + G(u(t))\,(u_2'(t))^2\\
&= E(u(t))\Big(\frac{c}{E(u(t))}\Big)^2 + G(u(t))\,\frac{c^2 - E(u(t))}{E(u(t))\,G(u(t))} = 1.
\end{aligned}$$

Derivoimalla yhtälö $G(u(t))\,(u_2'(t))^2 = 1 - E(u(t))\,(u_1'(t))^2$ puolittain saadaan yhtälön (11.3) avulla (muista, että $\partial_1E = \partial_1G = 0$)

$$\begin{aligned}
&\partial_2G(u(t))\,(u_2'(t))^3 + 2\,G(u(t))\,u_2'(t)\,u_2''(t)\\
&\quad= -\partial_2E(u(t))\,u_2'(t)\,(u_1'(t))^2 - 2\,E(u(t))\,u_1'(t)\,u_1''(t)\\
&\quad= -\partial_2E(u(t))\,u_2'(t)\,(u_1'(t))^2 + 2\,E(u(t))\,u_1'(t)\,\frac{\partial_2E(u(t))\,u_1'(t)\,u_2'(t)}{E(u(t))}\\
&\quad= \partial_2E(u(t))\,u_2'(t)\,(u_1'(t))^2.
\end{aligned}$$

Kun nyt oletetaan, että $u_2'(t) \neq 0$, kun $t \in I$, saadaan puolittain jakamalla termillä $2\,G(u(t))\,u_2'(t)$,

$$\frac{\partial_2G(u(t))}{2\,G(u(t))}\,(u_2'(t))^2 + u_2''(t) = \frac{\partial_2E(u(t))}{2\,G(u(t))}\,(u_1'(t))^2.$$

Tämä on jälkimmäinen seurauksen 11.8 yhtälöistä. □

SEURAUS 11.12. *Olkoot $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ Clairaut'n u_2-tilkku ja $\alpha\colon I \to \mathcal{M}$,*

$$\alpha(v) = \varphi(u(v), v).$$

Tällöin polku α on esigeodeettinen, jos ja vain jos on olemassa vakio c siten, että

$$\frac{du}{dv} = \pm c\sqrt{\frac{G}{E\,(E - c^2)}} \tag{11.4}$$

TODISTUS. Parametrisoidaan polku α kaarenpituuden avulla,

$$\beta(s) = \alpha(v(s)).$$

Jos β on geodeettinen, saadaan edellisen lemman 11.11 nojalla

$$\frac{d}{ds}u(v(s)) = \frac{c}{E(u(v(s)),v(s))} \quad \text{ja}$$
$$\frac{d}{ds}v(s) = \pm\frac{\sqrt{E(u(v(s)),v(s)) - c^2}}{\sqrt{E(u(v(s)),v(s))\,G(u(v(s)),v(s))}}\,.$$

Tällöin

$$\frac{du}{dv} = \frac{(u\circ v)'(s)}{v'(s)} = \pm\frac{c\sqrt{E(u(v(s)),v(s))\,G(u(v(s)),v(s))}}{E(u(v(s)),v(s))\sqrt{E(u(v(s)),v(s)) - c^2}}$$
$$= \pm c\sqrt{\frac{G(u(v),v)}{E(u(v),v)\,(E(u(v),v) - c^2)}}\,.$$

Kääntäen, jos väitetty yhtälö (11.4) toteutuu, niin määrätään u' ja v' siten, että

$$\frac{u'}{v'} = \pm c\sqrt{\frac{G}{E\,(E - c^2)}} \quad \text{ja}$$
$$E\,(u')^2 + G\,(v')^2 = 1.$$

Tällöin lemman 11.11 yhtälöt (11.2) toteutuvat, joten α on esigeodeettinen. □

11.3. Pseudopallo

ESIMERKKI 11.13. Pyörähdysinta, jolle

$$\varphi(\theta,t) := (x_1(t)\cos\theta, x_1(t)\sin\theta, x_2(t)),$$

on Clairaut'n t-tilkku, sillä

$$ds^2 = x_1(t)^2\,d\theta^2 + \big(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2\big)\,dt^2.$$

Siis

$$E(\theta,t) = x_1(t)^2, \quad F(\theta,t) = 0, \quad G(\theta,t) = x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2.$$

Geodeettisten käyrien yhtälö (seuraus 11.12) saa nyt muodon

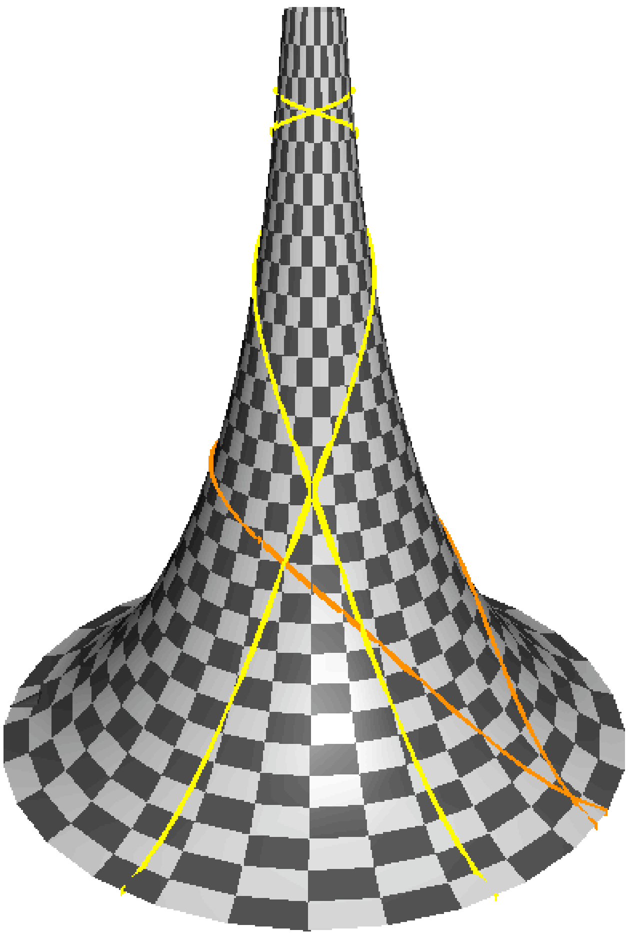
$$\frac{d\theta}{dt} = \pm c\sqrt{\frac{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}{x_1(t)^2\,(x_1(t)^2 - c^2)}}\,.$$

Pseudopallolle on

$$\begin{cases} x_1(t) := a\,e^{-t/a}, \\ x_2(t) := \displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2s/a}}\,ds, \end{cases}$$

joten $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 = 1$, ja muotoa $t \mapsto \varphi(\theta(t),t)$ oleville geodeetisille käyrille saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm c\,\frac{1}{a\,e^{-t/a}\sqrt{a^2\,e^{-2t/a} - c^2}}.$$



KUVA 1. Pseudopallo ja sen geodeettisia polkuja.

Siis

$$\theta(t) = \theta_0 \pm \frac{c}{a} \int \frac{e^{t/a}\,dt}{\sqrt{a^2\,e^{-2t/a} - c^2}} = \theta_0 \pm \frac{c}{a^2} \int \frac{e^{2t/a}\,dt}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\,e^{2t/a}}}$$
$$\overset{(1)}{=} \theta_0 \pm \frac{a}{2c} \int \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau}} = \theta_0 \mp \frac{a}{c}\sqrt{1-\tau}$$
$$= \theta_0 \mp \frac{1}{c}\sqrt{a^2 - c^2\,e^{2t/a}},$$

missä kohdassa (1) on käytetty sijoitusta $\tau = \frac{c^2}{a^2}\,e^{2t/a}$.

HUOMAUTUS 11.14. Pseudopallolla on (differentiaali-)geometrian historiassa varsin tärkeä rooli. NIKOLAI LOBATŠEVSKI ja JANOS BOLYAI julkaisivat tukimuksensa *epäeuklidisesta geometriasta* 1800-luvun alussa (NL: 1829, JB: 1832).[3] Heidän teoriansa jäi kuitenkin siinä mielessä ”tyhjän päälle”, että he eivät pystyneet esittämään

[3]Euklidisessa geometriassa tärkeä oletus on *paralleeliaksiooma*: annetun suoran L ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suoran L kanssa yhdensuuntainen suora. Epäeuklidisessa geometriassa tämä aksiooman tilalla vaaditaan: annetun suoran L ulkopuolella

konkreettista mallia geometrialleen. Karl Friedrich Gaussin artikkelin *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) julkaisemisen jälkeen Gaussin oppilas Ferdinand Minding ”löysi” monta vakiokaarevuista pintaa, näiden joukossa pseudopallon. (Pseudopallon joitain ominaisuuksia tosin tunnettiin jo varhaisemmalta ajalta; Huygens (1693): pinta-ala, tilavuus, painopiste). Pseudopallon yhteyden epäeuklidiseen geometriaan oivalsi vasta Eugenio Beltrami (1868).

Myös Gauss pääsi melko lähelle epäeuklidista geometriaa tuloksellaan, joka nykyään tunnetaan *Gaussin ja Bonnet'n lauseena*: Olkoon $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ sileän pinnan lokaali parametriesitys. Olkoon $\Delta \subset \mathcal{U}$ osajoukko, jonka reunan kuvajoukko $\mathcal{S} := \varphi(\Delta) \subset \mathcal{M}$ koostuu kolmesta geodeettisesta polusta (”geodeettinen kolmio”). Tällöin

$$\int_{\mathcal{S}} K\, dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

missä α, β ja γ ovat kolmion $\mathcal{S}$ sisäkulmat ja K pinnan $\mathcal{M}$ Gaussin kaarevuus.

Pseudopallolle, jolle $K = -1$, on siis ($A(\mathcal{S})$ = pinnan $\mathcal{S}$ pinta-ala)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A(\mathcal{S}).$$

Yleisemmässä muodossaan Gaussin ja Bonnet'n lause sanoo:

$$\int_{\mathcal{S}} K\, dS + \int_{\partial\mathcal{S}} \varkappa_g\, ds = -\sum_{j=1}^{n} \delta_j + 2\pi,$$

missä $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ on monikulmion $\Delta \subset \mathcal{U}$ kuvajoukko, δ_j, $1 \leq j \leq n$, ovat monikulmion $\mathcal{S}$ kärkipisteiden ulkokulmat ja $\varkappa_g$ on reunan $\partial\mathcal{S}$ (paloittain määritelty) geodeettinen kaarevuus.

11.4. Loppu

(kurssin, ei differentiaaligeometrian)

---

olevan pisteen kautta voidaan piirtää useita suoran L kanssa yhdensuuntaisia suoria. Euklidisen geometrian paralleeliaksioomalle yhtäpitävää on tuttu tulos: kolmion kulmien summa on π.