JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 1 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 28.9.2010 16-18 MaD-355

1.1. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ filtterikantoja joukossa E.
a) Onko $\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?
b) Onko $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?

Merkintöjä. .
Ellei toisin mainita, E on seuraavassa tva, $\mathcal{F}(0)$ sen origon ympäristöfiltteri.
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

1.2. Osoita, että E on yhtenäinen. (Lisäkysymys: Onko topologinen ryhmä aina yhtenäinen?)

1.3. Osoita, että $\bigcap \mathcal{F}(0) = \overline{\{0\}}$ ja että se on vektorialiavaruus.

1.4. Osoita, että vektorialiavaruuden $F \subset E$ sulkeuma $\overline{F}$ on vektorialiavaruus.

1.5. Onko avoimen joukon $A \subset E$ balansoitu verho $\operatorname{bal} A = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K}\}$ aina avoin joukko? (Vihje: ei, mutta jos...)

1.6. Olkoon $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Merkitään
$V_m = \{f \in E \mid f(t)| \le m(t)\, \forall t \in \mathbf{R}\}$, missä $m \in E$ ja $m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}$.
Totea, että on olemassa E:n topologia $\mathcal{T}$, jossa yhteenlasku on jatkuva (ja E siis topologinen abelin ryhmä) ja $\mathcal{F} = \{V_m \mid m \in E \text{ ja } m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}\}$ on origon ympäristökanta. Onko $(E, \mathcal{T})$ tva? Entä onko (topologinen ja lineaarinen) aliavaruus

$$D = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f \text{ on kompakti}\} \subset E$$

tva? (Onkohan näillä muuten numeroituva origon ympäristökanta? Miksi moinen kysymys?)

1.7. Olkoon $U \subset E$ vektoriavaruuden E origon konveksi, balansoitu, ja absorboiva joukko. Osoita, että $\{\frac{1}{n}U \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ on origon ympäristökanta eräässä E:n vektoriavaruustopologiassa. Päteekö väite myös, vaikka U ei olisi konveksi? (Entä muiden ehtojen välttämättömyys?)

1.8. Kahden topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ välinen lineaarikuvaus $L : E \to F$ on jatkuva mielivaltaisessa pisteessä $a \in E$ täsmälleen ollessaan jatkuva origossa. Osoita, että L on tällöin tasaisesti jatkuva seuraavassa mielessä:

$$\forall A \in \mathcal{U}_{0,F} \quad \exists B \in \mathcal{U}_{0,E} : \quad (x - y) \in B \implies (Tx - Ty) \in A.$$

Exercise set 1 **Topological Vector Spaces**
tuesday 9.28 at 4-6 PM in MaD-355

1.1. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be filter bases in a set E.
a) Is$\{A \cup B \bigm| A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ a filter basis in the set E?
b) Is$\{A \cap B \bigm| A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ a filter basis in the set E?

Notation. .
Unless otherwise stated, E is a tvs, $\mathcal{F}(0)$ the neighbourhood filter of its origin.
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

1.2. Prove: E is connected. (PS: How about general topological groups?)

1.3. Prove that $\bigcap \mathcal{F}(0) = \overline{\{0\}}$ and that this is a vector subspace.

1.4. Prove that the closure $\overline{F}$ of a vector subspace $F \subset E$ is a vector subspace.

1.5. Is the balanced hull $\operatorname{bal} A = \{\lambda x \bigm| \lambda \in \mathbf{K}\}$ of any open set $A \subset E$ open? (Hint. no, but if ...)

1.6. Consider $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \bigm| f \text{ is continuous}\}$. Denote
$V_m = \{f \in E \bigm| f(t)| \leq m(t)\, \forall t \in \mathbf{R}\}$, where $m \in E$ and $m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}$.

Prove the existence of a topology $\mathcal{T}$ in E such that addition is continuous (so E is a topological abelian group) and $\mathcal{F} = \{V_m \bigm| m \in E \text{ and } m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}\}$ is a neighbourhood basis of the origin. Is $(E, \mathcal{T})$ a tvs? Is the subspace

$$D = \{f \in E \bigm| \operatorname{supp} f \text{ is compact }\} \subset E$$

a tvs? (Does it have a countable neighbourhood basis of the origin? Why do I ask?)

1.7. Let $U \subset E$ be convex, balanced and absorbing. Prove that $\{\frac{1}{n} U \bigm| n \in \mathbf{N}^*\}$ is a neighbourhood basis of the origin in some tvs-topology. (Do we need all 3 assumptions?)

1.8. A linear mapping $L : E \to F$ between 2 topological vector spaces $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ is continuous at any point $a \in E$ iff it is continuous at the origin. Prove that in this case L is uniformly continuous in the following sense

$$\forall A \in \mathcal{U}_{0,F} \quad \exists B \in \mathcal{U}_{0,E} : \quad (x - y) \in B \implies (Tx - Ty) \in A.$$