SUORAVIIVAISTA AJATTELUA
OSA III

TOPOLOGISET VEKTORIAVARUUDET JA DISTRIBUUTIOT

Lauri Kahanpää

Jyväskylän yliopisto 2013

Sisältö

Aluksi

Tämä ”Suoraviivaista ajattelua” -trilogian päättävä kolmas osa sisältää distribuutioteorian perusteet. Etenkin tässä yleistetään sarjan toisessa osassa [1] Banach-avaruuksille todistetut klassiset tulokset koskemaan myös yleisempiä topologisia vektoriavaruuksia.

Distribuutiot on luonnollisinta tulkita lokaalikonveksien vektoriavaruuksien duaalien alkioiksi. Distribuutioiden teoreettinen käsittely johtaisi myös nukleaaristen lokaalikonveksien avaruuksien määrittelyyn, mitä emme tee. Todettankoon tässä vain, että nukleaariset avaruudet ovat eräiltä ominaisuuksiltaan mahdollisimman erilaisia kuin Banach-avaruudet ja että heikot topologiat ovat esimerkki tästä. Myöskään differentiaalilaskentaa Banachin avaruudessa tai yleisemmässä topologisessa vektoriavaruudessa ei käsitellä näiden kansien välissä, vaan kollegani Ari Lehtosen oppimateriaalissa. Katsaus funktionaalianalyysin historiaan rajoittuu minimaalisiin henkilötietoihin (nimi, kotimaa, elinvuodet) useimmista nimeltä mainituista henkilöistä.

Kuten funktionaalianalyysin monisteessa [1] ovat nytkin käyttämistäni monista lähteistä tärkeimpiä opettajani, professori **Klaus Valan**[1] 1970-luvulla pitämät mainiot luennot. Distribuutioteorian osuus noudattelee suureksi osaksi Walter Rudinin kirjaa [3], mutta olen koettanut tehdä teoriasta vasta-alkajalle helpompaa keskittymällä yksiulotteiseen tapaukseen.

Olen syksyllä 2010 pitämäni kurssin aikana jakanut oppilailleni tämän tekstin osia ja minulla on nyt tilaisuus kiittää heitä omistuskirjoituksin varustetuin kirjoin niistä monista parannusehdotuksista ja korjauksista, joilla he ovat vaikuttaneet tekstin sisältöön.

Myös työtoverini ovat auttaneet minua monin tavoin kootessani näitä muistiinpanoja, mistä tahdon kiittää kaikkia mainitsematta erikseen enää ketään — funktionaalianalyysin ja minun yhteisen ystävän Ari Lehtosen nimihän jo lipsahti tähän tekstiin. Muut lähteet olen parhaani mukaan koettanut muistaa mainita kirjallisuusluettelossa. Jos lukija siitä huolimatta sattuu löytämään tekstistä joitakin omintakeisia kohtia, kyse on luultavasti joko tekemistäni virheistä tai unohtamistani kirjallisuusviitteistä.

Sysmässä kesällä 2012

Tekijä

[1] Klaus Eerikinpoika Thesleff Vala 1930–2000, Suomi.

Topologiset vektoriavaruudet

Funktionaalianalyysin tutkimuskohde ovat raja-arvoilmiöt vektoriavaruuksissa. Tätä varten olemme funktionaalianalyysin monisteessa ottaneet eri vektoriavaruuksissa käyttöön topologioita. Useimmat niistä olivat johonkin normiin perustuvia, mutta määrittelimme myös mm. heikon topologian. Tarkastelemalla uudelleen normiavaruuksien teoriaa huomaa, että monet todistukset edellyttävät topologialta loppujen lopuksi ainoastaan laskutoimitusten jatkuvuutta, joka tuntuukin luonnolliselta minimivaatimukselta "vektoriavaruustopologialle". Suuri osa normiavaruuksien teoriaa yleistyy jollakin tavalla topologisille vektoriavaruuksille, joskaan ei aina kaikille. Useissa tapauksissa myös normiavaruustilanteessa esitetyt todistukset ovat sopivin muutoksin toteutettavissa alkuperäistä lievemmin oletuksin. Kertaamme ja yleistämme funktionaalianalyysin klassilliset tulokset. Todistamme Hahnin ja Banachin lauseen avaruudessa, jonka topologialla on konvekseista joukoista muodostuva kanta. Baire'in kategorialause puolestaan liittyy metriikkaan, ja sen seurauksista esimerkiksi avoimen kuvauksen lause yleistetään helpoiten metrisoituvalle täydelliselle lokaalikonveksille vektoriavaruudelle eli Frèchet'n[2] avaruudelle.

1. Yleiset topologiset vektoriavaruudet

1.1. **Vektoriavaruustopologiat.**

Määritelmä 1.1. Symboli $\mathbb{K}$ edustaa seuraavassa joko reaalilukujen tai kompleksilukujen kuntaa varustettuna tavallisella itseisarvosta saadulla topologiallaan. *Vektoriavaruus* on seuraavassa $\mathbb{K}$-kertoiminen.

Topologinen vektoriavaruus on vektoriavaruus E varustettuna topologialla $\mathcal{T}$, jonka suhteen molemmat vektoriavaruuden laskutoimitukset

$$+ : E \times E \to E \quad \text{ja} \tag{1.1}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E \tag{1.2}$$

ovat jatkuvia. Tällaista topologiaa sanotaan avaruuden E *vektoriavaruustopologiaksi.*

Esimerkki 1.2. Topologisia vektoriavaruuksia ovat tietenkin esimerkiksi normiavaruudet, mutta on olemassa muitakin, vaikkapa mikä tahansa indiskreetillä topologialla varustettu vektoriavaruus ja Lebesguen[3] avaruudet[4] $L^p(A, \mu)$ myös silloin, kun $0 < p < 1$.

Huomautus 1.3. Topologisessa vektoriavaruudessa jokainen *siirtokuvaus* eli *translaatio* $E \to E : x \mapsto x + a$ on homeomorfismi. Vektoriavaruustopologia $\mathcal{T}$ on siis *siirto-* eli *translaatioinvariantti*: kun $A \subset E$ ja $a \in E$, niin

$$A \in \mathcal{T} \iff A + a \in \mathcal{T}.$$

[2]Maurice René Frèchet 1878–1973, Ranska.

[3]Henri Léon Lebesgue 1875–1941, Ranska.

[4]Lukijan tehtäväksi jää määritellä näihin liittyvä topologia. Kannattaa myös piirtää esim. 2-ulotteisen avaruuden $\ell_2^{\frac{1}{2}}$ yksikköpallo.

Vastaavasta syystä topologisen vektoriavaruuden topologia $\mathcal{T}$ on myös *homotetiainvariantti*: kun $A \subset E$ ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, niin

$$A \in \mathcal{T} \iff \lambda A \in \mathcal{T}.$$

Seurauksena translaatioinvarianssista on, että lineaarikuvaukset ovat topologisissa vektoriavaruuksissa jatkuvia *origossa* eli nollavektorin kohdalla aina ja vain ollessaan jatkuvia koko avaruudessa, vieläpä seuraavassa mielessä[5] tasaisesti:

Seuraus 1.4. *Kahden topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ välinen lineaarikuvaus $L : E \to F$ on jatkuva mielivaltaisessa pisteessä $a \in E$ täsmälleen ollessaan jatkuva origossa. Lisäksi L on tällöin* tasaisesti jatkuva *seuraavassa mielessä: Jokaista avaruuden F origon sisältävää avointa joukkoa A kohti on olemassa avaruuden E origon sisältävä avoin joukko B siten, että*

$$(x - y) \in B \implies (Lx - Ly) \in A.$$

Todistus. Jos L on jatkuva origossa, niin yhdistetty kuvaus

$$x \mapsto x - a \mapsto L(x - a) \mapsto L(x - a) + La = Lx$$

— eli kuvaus L itse — on jatkuva kohdassa a. Samaan tapaan päätellään, että missä tahansa kohdassa a jatkuva lineaarikuvaus on jatkuva origossakin. Tasaisuusehdon verifiointi jää harjoitustehtäväksi (0.0.8). □

Seuraus 1.5. *Kahden topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ välinen lineaarikuvaus $L : E \to F$ on* avoin kuvaus *eli kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi täsmälleen kuvatessaan avaruuden E jokaisen origon ympäristön U avaruuden F origon ympäristöksi.*

Todistus. Harjoitustehtävä (0.0.9). □

1.2. **Origon ympäristökannat ja filtterikannat.**

Seuraukset 1.4 ja 1.5 antavat aiheen tarkastella huolellisesti origon ympäristöjä.

Määritelmä 1.6. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$.

(1) Joukko $U \subset X$ on pisteen x *ympäristö*, eli x on joukon U *sisäpiste* jos on olemassa avoin joukko $A \in \mathcal{T}$, siten, että $x \in A \subset U$. Erityisesti jokainen pisteen x sisältävä avoin joukko on x:n ympäristö, *avoin ympäristö*.

(2) Pisteen x kaikkien ympäristöjen joukko on *x:n ympäristöfiltteri*

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset E \mid U \text{ on } x\text{:n ympäristö}\}.$$

Erityisesti topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T})$ origon ympäristöfiltteriä merkitään $\mathcal{U}_0$, mutta usein myös $\mathcal{U}_E$ tai $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$. [6]

(3) *Topologian $\mathcal{T}$ kanta* $\mathcal{K}$ on niin runsas kokoelma avoimia joukkoja, $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, että jokainen avoin joukko $A \in \mathcal{T}$ on yhdiste joistakin kantajoukoista: $A = \bigcup \mathcal{A}$ jollekin $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$.

[5] Avaruutemme ei välttämättä ole metrisoituva, joten tasainen jatkuvuus on määriteltävä uudelleen.

[6] $\mathcal{U}$ saksan sanasta Umgebung. Toisissa teksteissä näkee merkintää $\mathcal{F}(0)$.

Huomautus 1.7. Klassisen esimerkin topologian kannasta muodostavat metrisen avaruuden avoimet pallot. Toisen esimerkin saa *kahden topologisen avaruuden tulotopologiasta*, jossa kannan muodostavat alkuperäisten avointen joukkojen karteesiset tulot.

Topologisen avaruuden osajoukko $A \subset X$ on pisteen x ympäristö tasan silloin, kun on olemassa topologian kantaan kuuluva joukko $K \subset X$, jolla $x \in K \subset A$.

Topologisen avaruuden osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos ja vain jos se on jokaisen pisteensä ympäristö.

Vektoriavaruustopologian siirtoinvarianssi merkitsee, että kaikilla $x \in E$ pätee

$$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0 = \{x + A \mid A \in \mathcal{U}_0\}.$$

Määritelmä 1.8. Topologisen avaruuden pisteen $x \in E$ *ympäristökanta* on sellainen joukko $\mathcal{K}_x \subset \mathcal{U}_x$ pisteen x ympäristöjä, *kantaympäristöjä*, että jokainen ympäristö sisältää jonkin kantaympäristön:

$$\forall A \in \mathcal{U}_x \, \exists K \in \mathcal{K}_x : \; K \subset A,$$

jolloin ympäristöfiltteri $\mathcal{U}_x$ muodostuu kaikista ympäristökantajoukoista ja niitä joukko-opin mielessä suuremmista joukoista.

Esimerkki 1.9. Normiavaruudessa $(E, \|\cdot\|)$ pisteen x ympäristökannaksi kelpaa kaikkien x-keskisten $\|\cdot\|$-pallojen joukko. Sama pätee missä tahansa metrisessä avaruudessa.

Missä tahansa topologisessa avaruudessa $(X, \mathcal{T})$ pisteen x ympäristökannaksi kelpaa sen kaikkien avointen ympäristöjen joukko.

Normiavaruuksien ja heikkojen topologioiden käsittelystä on tuttua, että origon ympäristöt eivät voi olla aivan millaisia joukkoja tahansa. Osoitamme seuraavaksi mm, että jokaisessa topologisessa vektoriavaruudessa kaikki origon ympäristöt ovat "absorboivia joukkoja". Toisaalta origon ympäristöt voi valita teorian ja laskutekniikankin kannalta "edullisesti", millä tarkoitetaan, että on olemassa "sopivan säännöllisistä" kantaympäristöistä muodostuva origon ympäristökanta. Osoitamme seuraavassa lauseessa, että jokaisessa topologisessa vektoriavaruudessa origolla on ympäristökanta, joka muodostuu balansoiduista, suljetuista — ja tietenkin absorboivista — joukoista. Lisäksi seuraavassa luvussa käy ilmi, että ns. lokaalikonveksissa avaruudessa origon kantajoukkojen voi myös vaatia olevan konvekseja — siitä nimi. Määrittelemme ensin tarvittavat "geometriset" käsitteet.

Määritelmä 1.10. Vektoriavaruuden E osajoukko $A \subset E$ on *balansoitu*, jos

$$\alpha A \subset A \qquad \text{kaikilla } |\alpha| \leq 1.$$

Erityisesti $0 \in A$ ellei A ole tyhjä. Joukon $A \subset E$ *balansoitu verho* on suppein A:ta laajempi balansoitu joukko. Sellainen on olemassa, koska mielivaltaisen monen balansoidun joukon leikkaus tietenkin on balansoitu, joten joukon A balansoitu verho on

$$\operatorname{bal} A = \bigcap \{B \mid B \text{ on balansoitu ja } B \supset A\}.$$

Huomautus 1.11. Joukon A balansoitu verho on $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha A$.

Todistus. Harjoitustehtävä (0.0.5). □

Määritelmä 1.12. Vektoriavaruuden E osajoukko A on *absorboiva* eli A *absorboi* avaruuden E *pisteet*, mikäli kaikilla $x \in E$ on olemassa sellainen luku $\lambda > 0$, että

$$|\alpha| > \lambda \implies x \in \alpha A.$$

Määritelmä on yhtäpitävä sen kanssa, että jokainen origon kautta kulkeva $\mathbb{K}$-*suora* $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ $(x \in E \smallsetminus \{0\})$ sisältää jonkin joukkoon A sisältyvän 0-keskisen $\mathbb{K}$-*janan*[7] $\{\alpha x \mid |\alpha| \leq \varepsilon\}$, missä $\varepsilon > 0$. Erityisesti jokainen absorboiva joukko sisältää origon.

Huomaa, että vektoriavaruuden E balansoitu joukko $A \subset E$ on absorboiva aina ja vain, kun

$$E = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A.$$

Määritelmä 1.13. $\mathbb{K}$-kertoimisen vektoriavaruuden E osajoukko $A \subset E$ on *konveksi*[8], jos se sisältää pisteidensä väliset *reaaliset janat*:

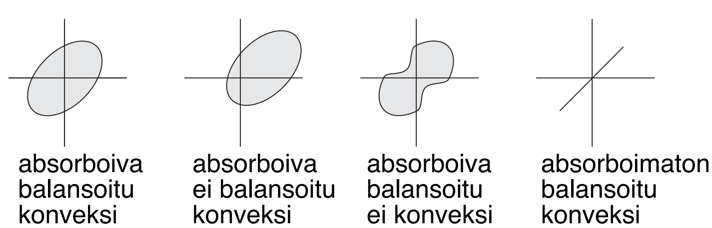
$$x \in A, y \in A, 0 \leq \alpha \leq 1 \implies \alpha x + (1-\alpha)y \in A.$$

Joukon $A \subset E$ *konveksi verho* on suppein sitä laajempi konveksi joukko. Sellainen on olemassa, koska mielivaltaisen monen konveksin joukon leikkaus tietenkin on konveksi, joten joukon A konveksi verho on

$$\operatorname{co} A = \bigcap \{B \mid B \text{ on konveksi ja } B \supset A\}.$$

Selvästi (tehtävä 0.0.7) konveksin verhon $\operatorname{co} A$ alkiot ovat joukon A alkioiden *konveksit kombinaatiot*, ts.

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, 0 \leq \alpha_i \leq 1,\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$



Kuva 1. Geometriaa reaalisessa vektoriavaruudessa

[7] Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin "jana" on pikemminkin "kiekko".

[8] Konveksia balansoitua joukkoa sanotaan toisinaan *absoluuttikonveksiksi.*

Esimerkki 1.14. a) Esimerkkejä vektoriavaruuden konvekseista joukoista ovat yksi piste, jana, suljettu kolmio, avoin kolmio, suljettu tetraedri ja normiavaruuden avoin ja suljettu pallo.

b) Äärellisen joukon $\{x_i \mid i = 1, 2 \dots n\}$ konveksi verho, *konveksi monitahokas*, on vektorien x_i *konveksien kombinaatioiden* joukko

$$\operatorname{co}\{x_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ ja } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

c) Äärellisen monen konveksin joukon $\{C_i \mid i = 1, 2 \dots n\}$ yhdisteen konveksi verho on vektorien $x_i \in C_i$ konveksien kombinaatioiden joukko

$$\operatorname{co} \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, x_i \in C_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

d) Jos $C \subset E$ ja $D \subset E$ ovat konvekseja, niin myös summajoukko $C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$ on konveksi.

Todistus. Harjoitustehtävä (0.0.13).

Määritelmä 1.15. Vektoriavaruuden E konveksi osajoukko A on *algebrallisesti avoin*, mikäli jokaisella reaalisella suoralla $s \subset E$ leikkaus $s \cap A$ on joko avoin jana, avoin puolisuora, koko suora tai tyhjä joukko.

Lause 1.16. *Topologisen vektoriavaruuden E origon ympäristöfiltterillä $\mathcal{U}_0$ on seuraavat ominaisuudet.*

(1.3) $\quad \forall A \in \mathcal{U}_0 \quad A$ *on absorboiva.*

(1.4) $\quad \forall A \in \mathcal{U}_0 \quad \exists B \in \mathcal{U}_0 : B + B \subset A.$

(1.5) $\quad \forall A \in \mathcal{U}_0 \quad \exists B \in \mathcal{U}_0 : B$ *on balansoitu ja suljettu ja* $B \subset A$.

Todistus. (1.3): Olkoon $x \in E$. Koska tulo on jatkuva ja $0x = 0$, niin on olemassa luvun $0 \in \mathbb{K}$ kantaympäristö $B = B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) = \{\alpha \in \mathbb{K} \mid |\alpha| < \varepsilon\}$ siten, että $Bx \subset A$, jolloin $x \in \frac{1}{\varepsilon} A$.

(1.4): Yhteenlasku $+ : E \times E \to E$ on vektoriavaruustopologian määritelmän 1.1 mukaan jatkuva ja $+(0, 0) = 0 + 0 = 0$. Siksi on olemassa tulotopologian mielessä pisteen $(0, 0)$ kantaympäristö $W = C \times D$ siten, että

$$C + D = +(C \times D) \subset A.$$

Valitse $B = C \cap D$.

(1.5): Riittää osoittaa, että

(i) jokainen origon ympäristö $A \in \mathcal{U}_0$ sisältää origon balansoidun ympäristön,
(ii) jokainen origon ympäristö $A \in \mathcal{U}_0$ sisältää origon suljetun ympäristön ja
(iii) balansoidun joukon sulkeuma on balansoitu.

Kukin näistä on tosi:

(i) Tulokuvaus $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ on jatkuva ja $\cdot(0_{\mathbb{K}}, 0_E) = 0$. Siksi on olemassa tulotopologian mielessä pisteen $(0_{\mathbb{K}}, 0_E) \in \mathbb{K} \times E$ kantaympäristö $W = C \times D$ siten, että

$$CD = \cdot(C \times D) \subset A$$

Voimme valita tässä C:ksi origokeskisen välin

$$C = B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon).$$

Etsityksi ympäristöksi kelpaa $B = \bigcup_{|\alpha| \leq \varepsilon/2} \alpha D = \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{bal} D$.

(ii) Olkoon $S \in \mathcal{U}_0$. Jo todistetun nojalla on olemassa balansoitu origon ympäristö B siten, että $B + B \subset A$. Todistetaan, että $\overline{B} \subset A$: Olkoon $x \in \overline{B}$. Koska $x + B \in \mathcal{U}_x$, niin $B \cap (x + B) \neq \emptyset$, joten on olemassa $z, y \in B$, joilla $z = x + y$ eli $x = z - y \in B - B \subset B + B \subset A$.

(iii) Olkoon $x \in \overline{A}$ ja $0 < |\alpha| < 1$. Osoitetaan, että $\alpha x \in \overline{A}$. Olkoon $U \in \mathcal{U}_0$ eli $\alpha x + U \in \mathcal{U}_{\alpha x}$. Vektoriavaruustopologian homotetiainvarianssi takaa, että $\frac{1}{\alpha}U$ on 0:n ympäristö, joten $x + \frac{1}{\alpha}U$ on x:n ympäristö ja siis

$$(x + \tfrac{1}{\alpha}U) \cap A \neq \emptyset.$$

Olkoon $y \in (x + \frac{1}{\alpha}U) \cap A$. Silloin

$$\alpha y \in (\alpha x + U) \cap \alpha A \subset (\alpha x + U) \cap A,$$

koska A on balansoitu. $\square$

Seuraus 1.17. *Topologisessa vektoriavaruudessa konveksin joukon sulkeuma on konveksi.*

Todistus. Kuulukoot x ja y avaruuden X konveksin osajoukon C sulkeumaan ja olkoon $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, missä $0 \leq \alpha \leq 1$. Osoitetaan, että $z \in \overline{C}$. Olkoon $z + U \in \mathcal{U}_z$ eli $U \in \mathcal{U}_0$. Valitaan $V \in \mathcal{U}_0$ siten, että $V + V \subset U$. Koska $x, y \in \overline{C}$, on olemassa $x' \in (x+V) \cap C$ ja $y' \in (y+V) \cap C$. Nyt $\alpha x' + (1-\alpha)y' \in x + (1-\alpha)y + V + V \subset z + U$ ja $\alpha x' + (1-\alpha)y' \in C$. $\square$

Huomautus 1.18. Topologisessa vektoriavaruudessa konveksin joukon sisus on konveksi.

Perustelu. Ks. lemma 3.2 eli harjoitustehtävä (0.0.17).

Huomautus 1.19. Topologisen avaruuden topologia määräytyy huomautuksen 1.7 mukaan täysin, kun tiedetään kaikkien pisteiden ympäristöfiltterit. Erityisesti topologisessa vektoriavaruudessa riittää tuntea origon ympäristöt, koska muiden pisteiden ympäristöt saadaan niistä siirrolla. Olemme edellisessä lauseessa 1.16 todenneet, että origon ympäristöfilttereillä on laskutoimituksiin liittyviä erityisominaisuuksia. Seuraavan tarkastelun sisältönä on selvittää, missä mielessä edellisen lauseen ehdot (1.3) – (1.5) ovat riittäviä karakterisoimaan origon ympäristöfiltterin. Ilmaisun helpottamiseksi ja vastaisen varalle määrittelemme ensin sopivan käsitteen, nimittäin (yleisen) filtterin ja sen kannan.

Määritelmä 1.20. Olkoon X joukko ja $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ sen potenssijoukko.

a) Kokoelma osajoukkoja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filtteri*, mikäli se toteuttaa *filtteriaksioomat*:

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \quad \text{ja } \mathcal{F} \neq \emptyset \tag{1.6}$$

$$A, B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{F} \tag{1.7}$$

$$A \supset B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{F} \tag{1.8}$$

b) Kokoelma filtterin joukkoja $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ on *filtterin $\mathcal{F}$ filtterikanta*, mikäli jokainen filtteriin $\mathcal{F}$ kuuluva joukko sisältää jonkin kantajoukon. Sanomme tällöin, että $\mathcal{K}$ *virittää filtterin $\mathcal{F}$*.
c) Kokoelma osajoukkoja $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filtterikanta*, mikäli se toteuttaa *filtterikanta-aksioomat*:

$$\emptyset \notin \mathcal{K} \quad \text{ja } \mathcal{K} \neq \emptyset \tag{1.9}$$

$$A, B \in \mathcal{K} \quad \Longrightarrow \quad \exists C \in \mathcal{K} : C \subset A \cap B. \tag{1.10}$$

Huomautus 1.21. On helppo todeta, että filtterin $\mathcal{F}$ kanta toteuttaa filtterikanta-aksioomat ja että jokainen filtterikanta $\mathcal{K}$ virittää filtterin, nimittäin filtterin $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \{A \subset X \mid \exists K \in \mathcal{K} \text{ s.e. } K \subset A\}$. Huomaa, että $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ riippuu perusjoukosta X.
Topologisen avaruuden avoimet joukot määräytyvät huomautuksen 1.7 mukaan täysin, kun jokaiselle pisteelle on annettu ympäristöfiltteri tai sen kanta. Minkä tahansa joukon X voisi siis yrittää varustaa topologialla liittämällä jokaiseen pisteeseen $x \in X$ jokin filtteri $\mathcal{U}_x$ tai filtterikanta $\mathcal{K}_x$, jonka alkiot julistettaisiin ympäristöiksi. Tällä tempulla ei kuitenkaan aina synny topologiaa, sillä topologisen avaruuden ympäristöillä on seuraavat ominaisuudet:

(Y1) piste kuuluu jokaiseen ympäristöönsä, ts. $U \in \mathcal{U}_x \implies x \in U$,
(Y2) ympäristö sisältää "avoimen ympäristön", ts. $U \in \mathcal{U}_x \implies \exists V \in \mathcal{U}_x$ siten, että kaikilla $y \in V$ on $V \in \mathcal{U}_y$.

Helpoksi harjoitustehtäväksi (0.0.10) jää kontrolloida, että nämä kaksi ehtoa takaavat, että filtterit $\mathcal{U}_x$ ovat ympäristöfiltterit jossain X:n topologiassa. Mielenkiintoisempaa on muodostaa vastaava lause topologisille vektoriavaruuksille:

Lause 1.22. *Olkoon E vektoriavaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) *kaikki filtterin $\mathcal{F}$ alkiot ovat absorboivia joukkoja,*
(ii) *jokainen filtterin $\mathcal{F}$ alkio sisältää filtteriin $\mathcal{F}$ kuuluvan balansoidun joukon,*
(iii) *kaikilla $A \in \mathcal{F}$ on olemassa $B \in \mathcal{F}$ siten, että $B + B \subset A$ ja*
(iv) *kaikilla $A \in \mathcal{F}$ ja $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ pätee $\alpha A \in \mathcal{F}$.*

Silloin on olemassa täsmälleen yksi sellainen vektoriavaruuden E vektoriavaruustopologia $\mathcal{T}$, että

$$\mathcal{F} = \mathcal{U}_0.$$

Todistus. Jos haluttu topologia on olemassa, niin siinä pisteen $x \in E$ ympäristöfiltteri on $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0 = x + \mathcal{F}$, joten tämä on ainoa ehdokas etsityksi topologiaksi. Osoitetaan, että se on E:n vektoriavaruustopologia.

Osoitetaan ensin, että ympäristöfiltteriehdokkaat $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{F}$ muodostavat topologian. On verifioitava huomautuksen 1.21 kohdat Y1 ja Y2.

Koska $\mathcal{F}$ muodostuu absorboivista joukoista, niin ne kaikki sisältävät origon ja siis ainakin $x \in U$ aina, kun $U \in x + \mathcal{F}$, joten Y1 toteutuu.

Ehdon Y2 varmistamiseksi tarkastellaan ympäristöä $U \in \mathcal{U}_x$ eli joukkoa $U = x+A$, missä $A \in \mathcal{F}$. Valitaan

$$V = \{y \in U \mid \exists B \in \mathcal{F} \text{ s.e. } y + B \subset U\},$$

jolloin selvästi $U \in \mathcal{U}_y$ kaikilla $y \in V$. Riittää siis todistaa, että $V \in \mathcal{U}_x$. Oletuksen (iii) nojalla voidaan valita sellainen $B \in \mathcal{F}$, että $B + B \subset A$. Nyt $x + B \in \mathcal{U}_x$, mutta lisäksi $x + B \subset V$, sillä kaikilla $y \in x + B$ on $y + B \subset x + B + B \subset x + A = U$. Siis $U \in \mathcal{U}_y$.

Näin on myös ehto Y2 voimassa, joten on luotu vektoriavaruuden E topologia $\mathcal{T}$, jossa $\mathcal{F} = \mathcal{U}_0$. Osoitetaan, että se on vektoriavaruustopologia.

Summan jatkuvuus on ilmeinen: Jos $x, y \in E$ ja $(x + y) + A \in (x + y) + \mathcal{F}$, niin valitaan oletuksen iii) mukainen $B \in \mathcal{F}$ siten, että $B + B \subset A$, jolloin

$$+((x + B) \times (y + B)) = x + y + B + B \subset (x + y) + A.$$

Tulon jatkuvuus voidaan todistaa hieman samaan tapaan vetoamalla kohtiin ii), iii) ja iv). Se huvi jääköön lukijalle, sillä sen sijasta nyt esitetään teoreettisesti mielenkiintoisempi todistus, jossa ei lainkaan tarvita ehtoa iv). Koska tulon jatkuvuus päättää todistuksemme sille, että saatiin vektoriavaruustopologia, niin tulee samalla todistetuksi, että ehto iv) itse asiassa seuraakin kolmesta ensimmäisestä.[9]

Olkoon $x_0 \in E$, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ja $A \in \mathcal{F}$. On löydettävä $B \in \mathcal{F}$ ja $\varepsilon > 0$ siten, että $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \times (x_0 + B)$ kuvautuu kertolaskussa ympäristön $\lambda_0 x_0 + A$ sisään.

Valitaan $n \in \mathbb{N}^*$ siten, että $|\lambda_0| < n$. Induktiolla päätellään, että on olemassa balansoitu $B \in \mathcal{F}$ siten, että $\underbrace{B + B + \cdots + B}_{n+2 \text{ kpl}} \subset A$. Koska B on absorboiva, on olemassa luku $\varepsilon \in]0, 1]$ siten, että $\lambda x_0 \in B$, kunhan $|\lambda| \leq \varepsilon$. Koska vielä B on balansoitu ja $|\frac{\lambda_0}{n}| \leq 1$, niin kaikilla $x \in B$ on

$$\lambda_0 x = n\tfrac{\lambda_0}{n} x \in nB \subset B + B + \cdots + B \ (n \text{ kpl}),$$

jolloin kaikilla $|\lambda| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}(\lambda_0 + \lambda)(x_0 + x) &= \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x + \lambda x_0 + \lambda x \\ &\in \lambda_0 x_0 + (B + \cdots + B) \text{ (n kpl) } + B + B \subset \lambda_0 x_0 + A. \quad \square\end{aligned}$$

Huomautus 1.23. Filtteri-käsitettä ei kannattaisi esitellä ellei olisi olemassa muitakin tärkeitä filttereitä kuin ympäristöfiltterit. Esimerkkejä filttereistä ovat mm. seuraavat:

a) yhden *osajoukon* $A \subset X$ *virittämä filtteri*[10] $\{B \subset X \mid A \subset B\}$
b) *Fréchet'n filtteri* $\{B \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus B \text{ on äärellinen}\}$
c) *filtterin kuva(filtteri)*: Jos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on filtteri ja $\phi : X \to Y$ on kuvaus, niin $\{\phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ on filtterikanta F:ssä. Sen virittämä filtteri on *filtterin* $\mathcal{F}$ *kuva* $\phi(\mathcal{F})$.
d) *alkeisfiltteri* on Fréchet'n filtterin kuva kuvauksessa $\mathbb{N} \to X$ (joka on jono!).
e) *ultrafiltteri* eli *maksimaalinen filtteri* on filtteri, johon ei enää voi lisätä joukkoja ilman että se lakkaa olemasta filtteri.[11]

[9] Todistus on peräisin G. Köthen kirjasta [2].
[10] Yhden joukon virittämää filtteriä sanotaan usein *pääfiltteriksi*.
[11] Jokainen filtteri voidaan laajentaa ultrafiltteriksi vetoamalla Zornin lemmaan.

Määritelmä 1.24. (Filtterin ja filtterikannan suppeneminen)

a) Topologisessa avaruudessa X *filtteri* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos $U_x \subset \mathcal{F}$.

b) Topologisessa avaruudessa *filtterikanta* $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ *suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos kaikilla $U \in \mathcal{U}_x$ on olemassa $B \in \mathcal{K}$ siten, että $B \subset U$. Tämä merkitsee tietenkin juuri sitä, että filtterikannan $\mathcal{K}$ virittämä filtteri $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ suppenee kohti pistettä x.

Huomautus 1.25. Topologisessa avaruudessa alkeisfiltteri suppenee kohti pistettä x tasan silloin, kun vastaava jono suppenee kohti pistettä x.

Topologisessa avaruudessa filttereitä voi käyttää kuten jonoja metrisessä avaruudessa eli kaikkiin topologisiin tarkasteluihin. Esimerkiksi piste x kuuluu osajoukon A sulkeumaan tasan silloin, kun on olemassa joukon A osajoukoista muodostuva filtterikanta, joka suppenee kohti pistettä x. Yleisessä topologisessa avaruudessa ei vättämättä ole pistettä $x \in \overline{A}$ kohti suppenevaa A:n jonoa[12] (harjoitustehtävä 0.0.11).

Määritelmä 1.26. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *Hausdorff-avaruus*[13] eli toteuttaa *erotteluaksiooman*[14] T_2, mikäli kahdella sen eri pisteellä x ja y aina on olemassa erilliset ympäristöt.

Huomautus 1.27. a) Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on Hausdorff aina ja vain, kun mikään sen filtteri ei suppene kohti useampaa kuin yhtä pistettä.

b) Topologiselle vektoriavaruudelle E seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) E on Hausdorff,
(2) E:n yksipisteiset joukot eli yksiöt ovat kaikki suljettuja,[15]
(3) $\{0\}$ on suljettu,
(4) avaruuden E jokin yksipisteinen joukko on suljettu.

1.3. **Jatkuvat lineaarimuodot.**

Lineaarikuvauksen jatkuvuus- ja avoimuuskriteerit 1.4 ja 1.5 antoivat edellä aiheen tarkastella huolellisesti origon ympäristöjä, mikä juuri tehtiin kappaleessa 1.2. Palaamme tarkastelemaan jatkuvia lineaarikuvauksia, erityisesti sellaisia, joissa maaliavaruus on pelkkä $\mathbb{K}$ eli lineaarimuotoja. Huomattakoon, että vektoriavaruudessa yleisesti käytetyt Hamelin koordinaatit ja Hilbertin avaruuden koordinaatit ovat lineaarimuotoja.

Määritelmä 1.28. Lineaarikuvauksia vektoriavaruudelta E yksiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{K}$ sanotaan *lineaarimuodoiksi* ja useimmiten merkitään lineaarimuotoa symbolilla x' ja sen arvoa kohdassa x symbolilla $x'(x) = \langle x, x' \rangle$. Vektoriavaruuden E *(algebrallinen) duaaliavaruus* eli *duaali* on vektoriavaruus

$$E' = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on lineaarikuvaus}\}$$

[12]Filttereiden käytölle on olemassa vaihtoehto: Jonot voi korvata ns. ”verkoilla”. Verkko on kuvaus tietyn ehdon toteuttavalta järjestetyltä joukolta topologiseen avaruuteen. Verkon suppeneminen määritellään suunnilleen kuten jonon suppeneminen. Emme käytä verkkoja.

[13]Felix Hausdorff 1868–1942, Saksa.

[14]Saks. Trennungsaxiom

[15]Yleisessä topologisessa avaruudessa Hausdorffin ehto T_2 takaa yksiöiden olevan suljettuja, mutta käänteinen ei päde ilman lisäoletuksia.

eli kaikkien lineaarimuotojen avaruus. Selvästi E' on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $\mathbb{K}^E = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on kuvaus}\}$ aliavaruus.

Topologisen vektoriavaruuden E *topologinen duaaliavaruus* eli *topologinen duaali* — puhekielessä usein pelkkä *duaali* — on vektoriavaruus

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on jatkuva lineaarikuvaus}\}$$

eli kaikkien jatkuvien lineaarimuotojen avaruus. Selvästi $E^* \subset E'$ on aliavaruus. Jatkuvaa lineaarimuotoa merkitään usein symbolilla x^* ja sen arvoa kohdassa x symbolilla $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

Lause 1.29. *Topologisen vektoriavaruuden E lineaarimuodolle $f \in E'$ eli lineaarikuvaukselle $f : E \to \mathbb{K}$ ovat yhtäpitäviä seuraavat ehdot*

(1) $f \in E^*$ *eli* f *on jatkuva*
(2) $\operatorname{Ker} f$ *on suljettu*
(3) $\operatorname{Ker} f$ *ei ole avaruuden* E *aito, tiheä aliavaruus*
(4) f *on rajoitettu jossakin origon ympäristössä* $A \in \mathcal{U}_0$*.*

Todistus. Implikaatiot $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ ovat helposti todeksi huomattavia (harjoitustehtävä 0.0.14). Todistettavaksi jää $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

Huomautetaan aluksi kahdesta ilmeisestä tosiasiasta:

- Kun $A \subset E$ on balansoitu joukko, niin myös sen kuva lineaarikuvauksessa on balansoitu.
- Yksiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{K}$ balansoituja joukkoja ovat ainoastaan origokeskiset avoimet ja suljetut pallot, pelkkä origo, tyhjä joukko ja koko avaruus. Avaruuden $\mathbb{K}$ balansoitu lukujoukko on siis joko rajoitettu tai koko $\mathbb{K}$.

Lauseen tilanteessa lineaarikuvaus f suuntautuu yksiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{K}$. Avaruuden E mielivaltainen origon ympäristö A sisältää origon balansoidun ympäristön B, jonka kuva $T(B) \subset \mathbb{K}$ on balansoitu joukko ja siis joko rajoitettu tai koko $\mathbb{K}$.

Ehdon (4) todistus aloitetaan tekemällä sille vastaoletus: f ei ole rajoitettu missään origon ympäristössä, erityisesti ei missään balansoidussa ympäristössä $B \in \mathcal{U}_0$, vaan $f(B) = \mathbb{K}$. Siis $f(A) = \mathbb{K}$ kaikilla $A \in \mathcal{U}_0$. Siispä myös kaikilla $x \in E$ ja $A \in \mathcal{U}_0$ on $f(x + A) = f(x) + f(A) = f(x) + \mathbb{K} = \mathbb{K}$, jolloin $0 \in f(x + A)$ ja siis $\operatorname{Ker} f \cap (x + A) \neq \emptyset$. Lineaarimuodon f ydin on siis tiheä, ja oletuksen (3) mukaan se näin ollen on koko avaruus, eli $f = 0$, mikä on mahdotonta, koska oletimme että minkään ympäristön kuva ei ole rajoitettu saati pelkkä $\{0\}$.

Paluuimplikaatio $(4) \Rightarrow (1)$ seuraa lauseen 2.15 ehdosta (5), koska $|\cdot|$ on lokaalikonveksin avaruuden $\mathbb{K}$ topologian määrittelevä seminormi. $\square$

Huomautus 1.30. Nollasta eroavan lineaarimuodon ydin eli *hypertaso* on siis aina joko suljettu tai tiheä sen mukaan onko lineaarimuoto jatkuva vai ei.

Huomautus 1.31. Topologisessa vektoriavaruudessa nollasta eroava lineaarimuoto $f \in E'$ on aina avoin kuvaus. Origon ympäristö $A \in \mathcal{U}_E$ sisältää nimittäin balansoidun absorboivan joukon B ja tällaisen kuva $f(B)$ on origon ympäristö, sillä B on absorboiva, joten on olemassa $\alpha > 0$, jolla $\alpha x \in B$, jolloin $f(\alpha x) = \alpha f(x) \neq 0$, joten $f(B)$ ei ole tyhjä eikä pelkkä $\{0\}$, mutta kuitenkin balansoitu, siis origon ympäristö.

1.4. **Äärellisulotteiset topologiset vektoriavaruudet.**

Lause 1.32. (Tihonov 1935)[16] *Jokainen n-ulotteinen topologinen Hausdorff-vektoriavaruus $(E, \mathcal{T})$ on lineaarisesti homeomorfinen eli* topologisena vektoriavaruutena isomorfinen *euklidisen avaruuden $\mathbb{K}^n$ kanssa.*

Todistus. Olkoon $(e_1, \dots, e_n)$ vektoriavaruuden E kanta. Jokainen kuvaus

$$\mathbb{K} \to E : \lambda \mapsto \lambda e_i$$

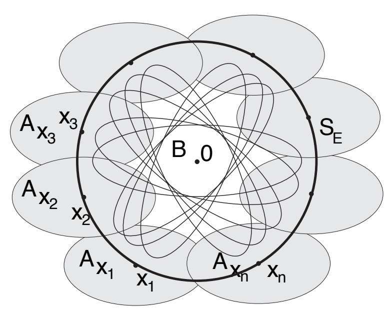
on jatkuva. Siis myös yhdistetty kuvaus

$$\mathbb{K}^2 \to E \times E \to E$$
$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) \mapsto \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

on jatkuva. Huomattakoon, että $\mathbb{K}^n$:ssä tulotopologia on sama kuin euklidinen topologia. Induktiolla saadaan, että kuvaus

$$\mathbb{K}^n \to E$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

on jatkuva. Lisäksi se on lineaarinen bijektio eli vektoriavaruusisomorfismi, joten voimme olettaa, että $E = \mathbb{K}^n$ ja $\mathcal{T}$ on jokin avaruuden $\mathbb{K}^n$ vektoriavaruustopologia. Väite on, että $\mathcal{T}$ yhtyy euklidiseen topologiaan $\mathcal{T}_e$, eli että identtinen kuvaus $(\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_e) \to (\mathbb{K}^n, \mathcal{T})$ on homeomorfismi. Totesimme sen juuri jatkuvaksi. Siksi euklidisen yksikköpallon pinta $S = S_E$ on $\mathcal{T}_e$-kompaktin joukon jatkuvana kuvana myös $\mathcal{T}$-kompakti. Peitetään S valitsemalla kullekin $x \in S$ topologian $\mathcal{T}$ mielessä avoin ympäristö $A_x \in \mathcal{U}_x$ ja valitaan samalla Hausdorffin T_2-ehtoa käyttäen myös origon ympäristöt $B_x \in \mathcal{U}_0$ siten, että $A_x \cap B_x = \emptyset$.



Kuva 2. Peite

On olemassa äärellinen osapeite

$$A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n} \supset S$$

ja sitä leikkaamaton origon ympäristö

$$B = B_{x_1} \cap \dots \cap B_{x_n}.$$

[16] Tihonov, Andrei Nikolajevitš 1906–1993, Venäjä/Neuvostoliitto.

B sisältää balansoidun ympäristön $C \in \mathcal{U}_0$, joka on euklidisesti yhtenäinen ja siis sisältyy kokonaan euklidiseen yksikköpalloon. Identtinen kuvaus $(E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T}_e)$ on siis jatkuva.

□

2. Lokaalikonveksit avaruudet

2.1. **Semipallot ja mittausfunktiot.**

Määritelmä 2.1. Vektoriavaruudessa E määritelty reaaliarvoinen kuvaus p on *subadditiivinen*, jos kaikille $x, y \in E$ pätee *kolmioepäyhtälö*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y). \tag{2.1}$$

Huomaa, että subadditiiviselle kuvaukselle pätee

$$p(x) - p(y) \quad \leq p(x-y) \text{ ja} \tag{2.2}$$

$$0 \quad \leq p(0) \leq p(x) + p(-x) \tag{2.3}$$

mistä seuraa, että $\max\{p(x), p(-x)\} \geq 0$ kaikille $x \in E$.

Subadditiivinen kuvaus p on *sublineaarinen*, jos kolmioepäyhtälön lisäksi pätee *positiivinen homogeenisuus* eli $\forall\, x, y \in E$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \;\; \forall \lambda \geq 0. \tag{2.4}$$

Esimerkki sublineaarikuvauksesta on $p(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$, missä jokainen f_i on lineaarinen ja $\sup_{i \in I} f_i(x)$ äärellinen.

Jokainen sublineaarifunktio $p : E \to \mathbb{R}$ on *konveksi funktio*, toisin sanoen kaikilla $x, y \in E$ ja niillä $\alpha, \beta \geq 0$, joilla $\alpha + \beta = 1$, pätee

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y), \tag{2.5}$$

erityisesti $p(0) = 0$ ja $p(\alpha x) \leq \alpha p(x)$ kaikille reaalisille α. Sublineaarikuvaus p on *seminormi* eli *puolinormi*, jos se on *homogeeninen* eli ehto 2.4 on voimassa hieman terästetyssä muodossa:

$$p(\lambda x) = |\lambda p(x)| \; \forall \lambda \in \mathbb{K}. \tag{2.6}$$

Erityisesti $p(x) = |p(x)| \geq 0$. Seminormille pätee myös *toinen kolmioepäyhtälö*

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y).$$

Esimerkiksi lineaarikuvauksen itseisarvo on seminormi. Toinen esimerkki seminormista on $p(x) = \sup_{|\lambda|=1} q(\lambda x)$, missä q on sublineaarinen.

Jos lisäksi

$$p(x) = 0 \text{ vain, kun } x = 0, \tag{2.7}$$

niin p on *normi*.

Määritelmä 2.2. Jos p on ei-negatiivinen sublineaarikuvaus, $x \in E$ ja $r > 0$, niin joukko $B_p(x, r) = \{y \in E \mid p(x-y) < r\}$ on (x-keskinen, r-säteinen) *avoin subpallo* ja $\bar{B}_p(x, r) = \{y \in E \mid p(x-y) \leq r\}$ vastaava *suljettu subpallo*. Origokeskisiä subpalloja merkitsemme $B_p(r)$ ja $\bar{B}_p(r)$, 1-säteisiä B_p ja $\bar{B}_p$. Nämä käsitteet eivät edellytä mitään topologiaa, vaikka nimissä esiintyvät sanat ”avoin” ja ”suljettu”.

Koska suljetun subpallon sulkeuma voi jossain topologiassa hyvinkin olla muuta kuin subpallo itse, merkitsemme subpallojen mahdollisia sulkeumia vähän pitemmällä viivalla, siis avoimen subpallon sulkeumaa $\overline{B_p(r)}$ ja suljetun $\overline{\bar{B}_p(r)}$.

Jos p on seminormi, niin vastaavia subpalloja sanotaan *semipalloiksi* tai — etenkin kun p on normi — *palloiksi*. Tässä kirjassa tarvitaan eniten semipalloja.

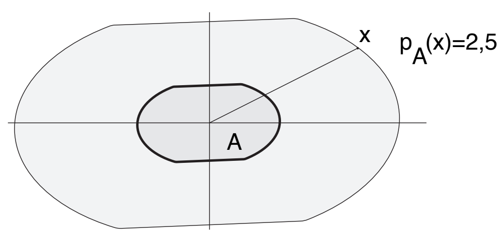
Seuraavien lauseiden ideana on näyttää yhteys sublineaarifunktion algebrallisten ominaisuuksien ja sen subpallon geometristen ominaisuuksien välillä.

Huomautus 2.3. (1) Ei-negatiivisen sublineaarifunktion avoin subpallo on algebrallisesti avoin, konveksi ja absorboiva.
(2) Seminormin avoin semipallo on lisäksi balansoitu.

Määritelmä 2.4. Vektoriavaruuden absorboivan, konveksin osajoukon $A \subset E$ *mittausfunktio* on $p : E \to \mathbb{R}$:

$$p(x) = \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}.$$

Huomaa, että $\lambda A \subset \mu A$ aina, kun $0 < \lambda < \mu$.



KUVA 3. Mittausfunktio

Lause 2.5. *Olkoon A vektoriavaruuden E konveksi ja absorboiva osajoukko.*

(1) *Joukon A mittausfunktio on ei-negatiivinen sublineaarinen kuvaus $p : E \to \mathbb{R}$.*
(2) *Joukon A mittausfunktion p origokeskinen avoin yksikkösubpallo B_p on joukon A* algebrallinen sisus, *ts.*

$$B_p = \{x \in A \mid \forall y \in E \exists \varepsilon > 0 \text{ siten, että kaikilla } 0 < \lambda \leq \ \text{ on } \varepsilon x + \lambda y \in A\}.$$

Erityisesti, jos A on algebrallisesti avoin eli yhtyy algebralliseen sisukseensa, niin mittausfunktion p origokeskinen avoin yksikkösubpallo on A.
(3) *Joukon A mittausfunktion p origokeskisen suljetun yksikkösubpallon mittausfunktio on p.*
(4) *Jos A on lisäksi balansoitu, niin sen mittausfunktio p on seminormi*

Todistus. (1) Ainakin $p(x)$ on ei-negatiivinen luku. Todistetaan kolmioepäyhtälö: Valitaan luvut $\lambda > p(x)$ ja $\mu > p(y)$, jolloin $\frac{x}{\lambda} \in A$ ja $\frac{y}{\mu} \in A$ ja siis, koska A on konveksi

$$A \ni \frac{\frac{1}{\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{y}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{x+y}{\lambda+\mu},$$

joten $p(x+y) \leq \lambda + \mu$. Koska tämä pätee kaikille $\lambda > p(x)$ ja $\mu > p(y)$, niin $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(2) ja (3) Seuraavat siitä, että $\lambda A \subset \mu A$ aina, kun $0 < \lambda < \mu$.

(4) Homogeenisuusehto $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ seuraa välittömästi, jos A on balansoitu.

Lopuksi $\mathbb{K}x \cap A$ on yksiulotteisen aliavaruuden $\mathbb{K}x$ suljettu jana, joten $x \in A \iff p(x) \leq 1$. □

Huomautus 2.6. a) Lauseet 2.3 ja 2.5 sanovat erityisesti, että sublineaarifunktiot ja niiden avoimet origokeskiset yksikkösubpallot eli absorboivat, konveksit, algebrallisesti avoimet joukot vastaavat toisiaan yksi yhteen.

b) Samoin seminormit ja niiden avoimet origokeskiset yksikkösemipallot eli balansoidut, absorboivat, konveksit, algebrallisesti avoimet joukot vastaavat toisiaan yksi yhteen.

c) Avaruuden E sublineaarikuvauksilla, erityisesti seminormeilla, on käytössä luonnollinen järjestysrelaatio

$$p \leq q \iff p(x) \leq q(x) \, \forall \, x \in E.$$

Tälle riittää tietenkin, että $p(x) \leq q(x)$ niille $x \in E$, joilla $q(x) \leq 1$. Itse asiassa riittää tarkastaa, että $q(x) \leq 1 \implies p(x) \leq 1$, eli $\bar{B}_q \subset \bar{B}_p$.

d) Samoin

$$p \leq q \iff \bar{B}_q \subset \bar{B}_p \iff B_q \subset B_p.$$

e) Seminormin nollakohtien joukko, sen *ydin* $\operatorname{Ker} p = \{x \in E \mid p(x) = 0\}$ on vektoriavaruuden E aliavaruus.

Määritelmä 2.7. *Lokaalikonveksi avaruus* on vektoriavaruus E varustettuna perheellä seminormeja $\mathcal{P}$. Seminormiperheeseen $\mathcal{P}$ liittyvä *lokaalikonveksi topologia* on vektoriavaruustopologia, joka määritellään valitsemalla origon ympäristökannaksi kaikki äärelliset leikkaukset perheen $\mathcal{P}$ seminormien avoimista semipalloista.

Sama topologia saadaan tietenkin perheen $\mathcal{P}$ seminormien suljetuista semipalloista. Seuraava lause selittää lokaalikonveksin topologian nimen.

Lause 2.8. *Topologinen vektoriavaruus E on lokaalikonveksi aina ja vain, kun sillä on konvekseista joukoista muodostuva origon ympäristökanta $\mathcal{K}_0$. Tällöin sillä on myös absorboivista, balansoiduista, konvekseista, suljetuista joukoista, eli* tynnyreistä *muodostuva origon ympäristökanta.*

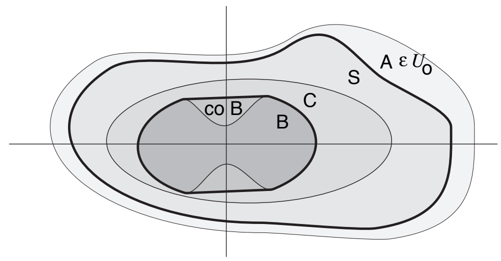
Todistus. Origokeskiset suljetut semipallot

$$\bar{B}_p(0, \varepsilon) = \{x \in E \mid p(x) \leq \varepsilon\}$$

ovat selvästikin konvekseja, absorboivia ja balansoituja ja nämä ominaisuudet periytyvät niiden äärellisille leikkauksille, jotka lauseen 1.22 mukaan muodostavat origon ympäristökannan jossain E:n vektoriavaruustopologiassa. Lisäksi suljetut semipallot ovat suljettuja tässä topologiassa (harjoitustehtävä 0.0.22) ja suljettujen joukkojen äärelliset leikkaukset ovat suljettuja. Suljettujen semipallojen äärelliset leikkaukset ovat siis jopa tynnyreitä, joten lauseen jyrkempikin ehto on välttämätön topologisen vektoriavaruuden lokaalikonveksiudelle.

Ehdon riittävyyden todistamiseksi oletetaan, että avaruudella on konvekseista joukoista muodostuva origon ympäristökanta $\mathcal{K}_0$. Osoitetaan ensin, että on olemassa tynnyreistä muodostuva origon ympäristökanta, eli että mielivaltainen origon ympäristö sisältää origon ympäristön, joka lisäksi on tynnyri: Olkoon $A \in \mathcal{U}_0$. Lauseen

1.16 mukaan on olemassa siihen sisältyvä suljettu origon ympäristö S. Siihen puolestaan sisältyy oletuksen nojalla konveksi origon ympäristö C ja uudelleen lauseen 1.16 mukaan vielä suppeampi balansoitu origon ympäristö B.



Kuva 4. Tynnyriympäristö

Osoitetaan, että ympäristön B suljetulla konveksilla verholla $\overline{\operatorname{co} B}$ on halutut ominaisuudet.

(1) On helppoa (harjoitustehtävä 0.0.20) todeta, että balansoidun joukon konveksi verho $\operatorname{co} B$ on balansoitu[17]. Tietysti se on myös konveksi ja $B \subset \operatorname{co} B \subset C \subset S$.

(2) Balansoidun joukon sulkeuma $\overline{\operatorname{co} B} \subset S \subset A$ on lauseen 1.16 päättelyn mukaan balansoitu, tietenkin suljettu ja origon ympäristönä myös absorboiva. Seurauksen 1.17 mukaan se on myös konveksi.

Avaruudella on siis tynnyreistä muodostuva ympäristökanta. Toinen vaihe riittävyystodistuksestamme liittää kuhunkin origon tynnyriympäristöön seminormin siten, että annettu tynnyri on sen suljettu yksikkösemipallo. Tällaiseksi seminormiksi tarjoutuu tietenkin tynnyrin $A \in \mathcal{U}_0$ mittausfunktio, joka lauseen 2.5 mukaan on seminormi. Täytyy vain varmistaa, että

$$x \in A \iff p(x) \leq 1.$$

Tämäkin onnistuu, sillä $\mathbb{K}x \cap A$ on yksiulotteisen aliavaruuden $\mathbb{K}x$ origokeskinen suljettu jana, joten $x \in A \iff p(x) \leq 1$. □

Huomautus 2.9. Lokaalikonveksi avaruus E on Hausdorff aina ja vain, kun kaikille $x \in E$ pätee, että $x = 0$ tasan silloin, kun $p(x) = 0$ kaikilla $p \in \mathcal{P}$.

Todistus. Väite seuraa siitä, että lauseen 1.26 mukaan topologinen vektoriavaruus on Hausdorff, kunhan sen yksipisteiset joukot ovat suljettuja. □

Seuraavaksi selvitämme, millä ehdoilla lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{P})$ määritelty seminormi q on jatkuva kuvaus $E \to \mathbb{R}$. On helppo arvata — ja totta — että ainakin topologian määrittelevään perheeseen kuuluvat seminormit $q \in \mathcal{P}$ ovat jatkuvia, ja että toisaalta jatkuvien seminormien lisääminen perheeseen $\mathcal{P}$ ei muuta topologiaa. Erityisesti kaikkien jatkuvien seminormien perhe määrää alkuperäisen lokaalikonveksin topologian. Motivaatioksi seuraavalle lauseelle huomautamme vielä siitä, että selviteltäessä lineaarikuvauksen jatkuvuutta on edullista osata tunnistaa

[17] Pieni piirros $\mathbb{R}^2$:ssa osoittaa, että konveksin joukon balansoitu verho ei yleensä ole konveksi. Myöskään suljetun joukon konveksi verho ei yleensä ole suljettu. Varo näitä!

jatkuvat seminormit. Tämän huomaa jo normiavaruuksien tapauksessa, sillä normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva tasan silloin, kun sen määräämä seminormi $p_T(x) = \|Tx\|$ on jatkuva, mikä tapahtuu tasan silloin, kun on olemassa vakio $C > 0$, jolla kaikissa pisteissä $x \in E$ pätee

$$p_T(x) \le C\|x\|.$$

Lause 2.10. *Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja p avaruudessa E määritelty seminormi. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä keskenään:*

(1) *p on jatkuva.*
(2) *B_p on avoin.*
(3) *B_p on origon ympäristö.*
(4) *$\bar{B}_p$ on origon ympäristö.*
(5) *p on rajoitettu jossakin origon ympäristössä A.*
(6) *p on jatkuva pisteessä 0.*

Jos $(E, \mathcal{P})$ oletetaan lokaalikonveksiksi, niin edellisten kanssa ovat yhtäpitäviä seuraavat hyvin käyttökelpoiset ehdot:

(7) *On olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja topologian virittävään joukkoon $\mathcal{P}$ kuuluvat seminormit $q_1, \dots, q_n$ siten, että*
$$\varepsilon(B_{q_1} \cap \dots \cap B_{q_n}) \subset B_p$$
(8) *On olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja seminormit $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}$ siten, että kaikilla $x \in E$*
$$\varepsilon\, p(x) \le \max\{q_1(x), \dots, q_n(x)\}.$$
(9) *On olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja seminormit $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}$ siten, että kaikilla $x \in E$*
$$\varepsilon\, p(x) \le q_1(x) + \dots + q_n(x).$$

Todistus. Ehdot (1)–(6) on helppo todeta yhtäpitäviksi, samoin lokaalikonveksissa tapauksessa ehdot (3) ja (7). Ehtojen (7),(8) ja (9) yhtäpitävyys seuraa siitä, että E:n seminormeille p, $q_1, \dots, q_n$ ja q pätee

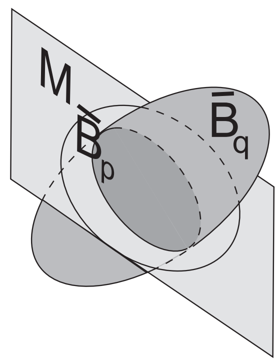
(i) $p \le q \iff B_p \supset B_q$,
(ii) $\max\{q_1, \dots q_n\}$ on seminormi ja $B_{\max\{q_1,\dots q_n\}} = B_{q_1} \cap \dots \cap B_{q_n}$,
(iii) $\max\{q_1, \dots q_n\} \le q_1 + \dots + q_n \le n \max\{q_1, \dots q_n\}$. □

2.2. **Lokaalikonveksin avaruuden aliavaruus ja jatkuvan seminormin laajentaminen.**

Topologisen vektoriavaruuden E aliavaruus $M \subset E$ perii avaruudelta E sekä lineaariset laskutoimitukset että aliavaruustopologian ja nämä tekevät siitä topologisen vektoriavaruuden.

Jos $(E, \mathcal{Q}_E)$ on lokaalikonveksi avaruus, niin osoittautuu, että myös aliavaruustopologia $\tau_E\big|_M$ on lokaalikonveksi ja sen virittävät seminormien $q \in \mathcal{Q}_E$ rajoittumat aliavaruuteen M ja origon ympäristökantana konveksit joukot $U \cap M$, missä U on avaruuden E origon konveksi kantaympäristö. Tämän luonnolliselta tuntuvan väitteen todistus perustuu siihen, että aliavaruuden jatkuvat seminormit ovat samoja kuin alkuperäisen avaruuden jatkuvien seminormien rajoittumat aliavaruuteen.

Lause 2.11. *Olkoon E vektoriavaruus, M sen aliavaruus, p seminormi avaruudessa M ja q seminormi koko avaruudessa E siten, että $p \leq q\big|_M$ eli $p(x) \leq q(x) \forall x \in M$. Tällöin on olemassa koko avaruudessa E määritelty seminormi $\bar{p}$ siten, että $p = \bar{p}\big|_M$ ja $\bar{p} \leq q$.*



Kuva 5. Seminormin jatkaminen

Todistus. Koska $p(x) \leq q(x) \forall x \in M$, niin $\bar{B}_q \cap M \subset \bar{B}_p$. Olkoon $B = \mathrm{co}(\bar{B}_q \cup \bar{B}_p.)$ Silloin $B \subset E$ on absorboiva, konveksi ja myös balansoitu, joten sen mittausfunktio $\bar{p}$ on seminormi. Koska $B \supset B_q$, niin $\bar{p}(x) \leq q(x) \forall x \in E$. Esimerkin 1.14 mukaan $B = \mathrm{co}(\bar{B}_q \cup \bar{B}_p) = \{\alpha x_q + \beta x_q \bigm| \alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha \leq 1, x_q \in \bar{B}_q, x_p \in \bar{B}_p\}$, joten $B \cap M = \bar{B}_p$ ja siis $\bar{p}(x) = q(x)$ kaikille $x \in M$. $\square$

Seuraus 2.12. *Olkoon $(E, \mathcal{Q}_E)$ lokaalikonveksi vektoriavaruus, M sen aliavaruus ja p jatkuva seminormi avaruudessa M. Tällöin on olemassa koko avaruudessa E määritelty jatkuva seminormi $\bar{p}$ siten, että $p = \bar{p}\big|_M$.*

Erityisesti aliavarustopologia $\tau_E\big|_M$ on lokaalikonveksi ja sen virittävät seminormien $q \in \mathcal{Q}_E$ rajoittumat aliavaruuteen M.

Seuraus 2.13. *Olkoon $(E, \mathcal{Q}_E)$ lokaalikonveksi vektoriavaruus. Merkitään seminormiperheen $\mathcal{Q}_E$ topologiaa τ_E. Olkoon edelleen $M \subset E$ lineaarinen aliavaruus, $\mathcal{P}_M$ sen jokin seminormiperhe ja τ_M vastaava lokaalikonveksi topologia.*

Inkluusiokuvaus $j : M \to E$ on jatkuva tasan silloin, kun jokainen $p \in \mathcal{P}_M$ on τ_E-jatkuva eli kun

$$\forall p \in \mathcal{P}_M \exists\, \lambda > 0 \text{ ja } q \in \mathcal{Q}_E \text{ siten, että } p \leq q\big|_M.$$

Erityisesti näin käy, kun jokainen $p \in \mathcal{P}_M$ on muotoa $q\big|_M$.

Perustelu. Väite seuraa lauseesta 2.12 ja siitä, että inkluusiokuvaus $j : M \to E$ on tietenkin jatkuva aina ja vain, kun topologian τ_E joukkoon M indusoima aliavaruustopologia $\tau_E\big|_M$ on karkeampi kuin τ_M. $\square$

Lauseesta 2.11 tarvitaan myöhemmin myös hieman muokattua versiota:

Lause 2.14. *Olkoon E lokaalikonveksi vektoriavaruus, M sen suljettu (!) aliavaruus ja p jatkuva seminormi avaruudessa M sekä $x_0 \in E \setminus M$. Tällöin on olemassa sellainen seminormin p jatko koko avaruuden jatkuvaksi seminormiksi $\bar{p}$, että x_0 ei kuulu $\bar{p}$:n avoimeen yksikkösemipalloon, vaan $\bar{p}(x_0) \geq 1$.*

Todistus. Valitaan p:lle jokin jatko avaruuden E jatkuvaksi seminormiksi q_1. Koska $x \notin M$, ja M on suljettu, on olemassa E:n jatkuva seminormi q_2 siten, että M ei leikkaa x_0-keskistä 1-säteistä q_2-semipalloa, vaan $q_2(x - x_0) \geq 1$ kaikilla $x \in M$.

Tällöin seminormi $q = \max\{q_1, q_2\}$ on joukossa M vähintään yhtä suuri kuin p eikä x_0 kuulu q-yksikkösemipalloon. Seminormia q joudutaan vielä korjaamaan, jotta se olisi p:n jatko. Jäljitellään lauseen 2.11 konstruktioita tarkastelemalla konveksia verhoa $B = \mathrm{co}(B_p \cup B_q)$, missä $B_p \subset M \subset E$ ja $B_q \subset E$ ovat seminormien avoimet yksikkösemipallot. Valitaan p:ksi konveksin verhon B mittausfunktio. Tämä toimii, onhan ensinnäkin E:ssä $p \leq q$, joten seminormi p on jatkuva. Toiseksi todella p on alkuperäisen seminormin jatko, kuten lauseen 2.11 todistuksessa todettiin. On vielä todettava, että $p(x_0) \geq 1$: Jos olisi $p(x_0) < 1$, niin olisi $x_0 \in B$. Tämä on mahdotonta, sillä jos $x - 0 \in B = \mathrm{co}(B_p \cup B_q)$, niin $x_0 = \lambda x_p + \mu x_q$ joillekin $x_p \in B_p$, $x_q \in B_q$ ja $\lambda, \mu \geq 0$, joilla $\lambda + \mu = 1$. Siis $\lambda x_p = x_0 - \mu x_q \in x_0 + B_q$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $x_p \in B_p \subset M$. □

2.3. **Lokaalikonveksin avaruuden jatkuvat lineaarikuvaukset.**

Lokaalikonveksien avaruuksien välisen lineaarikuvauksen jatkuvuus on mahdollista lausua seminormiepäyhtälöin.

Lause 2.15. *Olkoon $(E, \mathcal{T})$ topologinen vektoriavaruus ja $(F, \mathcal{P}_F)$ lokaalikonveksi avaruus sekä $T : E \to F$ lineaarikuvaus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä keskenään:*

(1) *T on jatkuva*
(2) *Kaikilla $p \in \mathcal{P}_F$ kuvaus $p \circ T$ on jatkuva seminormi avaruudessa E.*

Erityisesti, jos myös $(E, \mathcal{P}_E)$ on lokaalikonveksi, niin yhtäpitävää on myös

(3) $\forall p \in \mathcal{P}_F\ \exists \varepsilon > 0$ *ja* $\exists q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{P}_E$ *siten, että* $\forall x \in E$

$$\varepsilon\, p(Tx) \leq q_1(x) + \cdots + q_n(x).$$

Todistus. (1)$\Rightarrow$(2): Jos T on jatkuva, niin yhdistetty kuvaus $p \circ T$ on jatkuva, onhan lauseen 2.10 mukaan jokainen seminormi $p \in \mathcal{P}_F$ jatkuva. Lisäksi $p \circ T$ on helppo todeta seminormiksi.

(2)$\Rightarrow$(1): Olkoon $U \in \mathcal{U}_{0,F}$. Lokaalikonveksin topologian määritelmän 2.7 mukaan on olemassa $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_F$ ja $r > 0$ siten, että $r \bigcap_{i=1}^n B_{p_i} \subset U$. Oletuksen (2) mukaan jokainen $p \circ T$ on jatkuva avaruuden $(E, \mathcal{P}_E)$ topologiassa, joten on olemassa $V_i \in \mathcal{U}_{0,E}$ siten, että $T(V_i) \subset B_{p_i}$. Nyt $T(\bigcap_{i=1}^n rV_i) \subset r \bigcap_{i=1}^n B_{p_i} \subset U$. On löydetty avaruuden E origon ympäristö, joka kuvautuu annettuun ympäristöön $U \in \mathcal{U}_{0,F}$, joten T on jatkuva origossa ja siis kaikkialla, olipa E lokaalikonveksi tai ei.

(2)$\Rightarrow$(3): Olkoon $(E, \mathcal{P}_E)$ lokaalikonveksi ja $p \in \mathcal{P}_F$. Ehdon (2) nojalla kuvaus $p \circ T$ on jatkuva seminormi, joten edellisen lauseen ehdon (9) nojalla se toteuttaa todistettavana olevan lauseen ehdon (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Osoitamme, että mielivaltaiseen origon avoimeen ympäristöön $A \in \mathcal{U}_{0,F}$ kuvautuu jokin origon ympäristö $(E, \mathcal{P}_E)$:stä. Lokaalikonveksin topologian määritelmän 2.7 mukaan riittää tarkastella tilannetta, jossa $A = B_p$ jollekin $p \in \mathcal{P}_F$. Ehdon (3) nojalla on olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja seminormit $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}_E$ siten, että kaikille $x \in E$ pätee

$$\varepsilon\, p(Tx) \leq q_1(x) + \cdots + q_n(x).$$

Erityisesti siis pisteille $x \in B_{q_1}(0, \frac{\varepsilon}{n}) \cap \cdots \cap B_{q_n}(0, \frac{\varepsilon}{n})$ on

$$\varepsilon\, p(Tx) \leq \varepsilon$$

eli $p(Tx) \leq 1$, toisin sanoen $Tx \in B_p = A$. □

3. Konveksigeometrisia lauseita

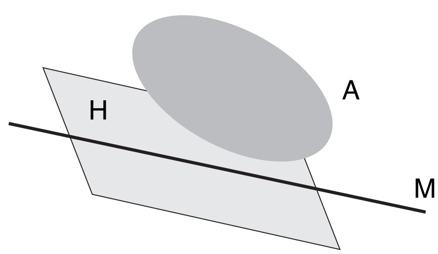
Aloitamme funktionaalianalyysin klassisten tulosten yleistämisen Mazurin[18] ja Banachin[19] lauseilla, koska nämä pätevät yleisessä topologisessa vektoriavaruudessa ilman mitään lisäoletuksia.

3.1. **Laajennus- ja erottelulauseet.**

Palautetaan aluksi mieleen, että vektoriavaruuden E *affiinilla aliavaruudella* tarkoitetaan joukkoa $M = x + F$, missä $x \in E$ ja $F \subset E$ on lineaarinen aliavaruus. *Affiini hypertso* on joukko $H = x + K$, missä $x \in E$ ja K on hypertaso eli nollasta eroavan lineaarimuodon ydin.

Lause 3.1. (Mazurin laajennuslause)

Olkoon E topologinen vektoriavaruus, $A \subset E$ konveksi, avoin joukko, ja $M \subset E$ affiini aliavaruus siten, että $M \cap A = \emptyset$. Tällöin on olemassa suljettu affiini hypertaso $H \subset E$ siten, että $M \subset H$ ja $H \cap A = \emptyset$.



Kuva 6. Mazurin laajennuslause

Todistus. Tapaus $A = \emptyset$ on triviaali. Yleisessä tapauksessa todistus perustuu Zornin lemmaan ja seuraaviin osatuloksiin, jotka ovat itsessäänkin kiinnostavia, eivätkä vaikeita tarkastaa[20].

[18]Stanisław Mazur 1905–1981, Puola.
[19]Stefan Banach 1892–1945, Puola.
[20]Vrt. [1] lause 21.9.

Lemma 3.2. *Topologisessa vektoriavaruudessa:*

(1) *Konveksi joukko on polkuyhtenäinen, siis myös yhtenäinen.*
(2) *Konveksin joukon sulkeuma on konveksi*
(3) *Konveksin joukon sisäpisteen ja kosketuspisteen välinen "avoin $\mathbb{R}$- jana" sisältyy joukon sisukseen.*
(4) *Konveksin joukon sisus on siis konveksi.*
(5) *Lineaarialgebrallinen projektio topologiselta vektoriavaruudelta sen (topologiselle, lineaariselle)* aliavaruudelle *— joka on aina topologinen vektoriavaruus — on avoin*[21] *kuvaus.*

Perustelu. Kohta (2) on sama kuin seuraus 1.17. Kohdat (1) ja (3) ovat harjoitustehtäviä (0.0.17) ja (4) on välitön seuraus kohdasta (3). Todistetaan kohta (5). Riittää, että pisteiden ympäristöt kuvautuvat kuvapisteiden ympäristöiksi. Tälle riittää, että origon ympäristöt kuvautuvat origon ympäristöiksi. Projektio aliavaruudelle $F \subset E$ on lineaarikuvaus $P : E \to E$, jolla $P \circ P = P$ ja $F = P(E)$, jolloin erityisesti $Px = x$ kaikille $x \in F$. Siksi origon ympäristön $A \in \mathcal{U}_E$ kuva $P(A)$ sisältää leikkauksen $A \cap F$, joka on aliavaruuden F origon ympäristö.

Mazurin laajennuslauseen 3.1 todistus. Voimme olettaa, että $0 \in M$, jolloin M on lineaarinen aliavaruus ja $0 \notin A$. Oletamme aluksi vielä, että $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Hypertasoehdokkaaksi H valitaan maksimaalinen alkio inkluusiorelaatiolla järjestetystä perheestä

$$\mathcal{A} = \{N \subset E \bigm| N \text{ on lineaarinen aliavaruus, } M \subset N,\ N \cap A = \emptyset\}.$$

Maksimaalisen alkion olemassaolo voidaan perustella *Zornin lemmalla*[22], sillä aliavaruusperheen $\mathcal{A}$ jokaisella inkluusion mielessä täysin järjestetyllä osaperheellä on yläraja perheessä $\mathcal{A}$, nimittäin alkioidensa yhdiste.

Maksimaalinen aliavaruus H toteuttaa lauseen ehdot, kunhan näemme, että se on hypertaso ja suljettu.

Valitaan aliavaruudelle $H \subset E$ jokin Hamel-kanta K ja laajennetaan se koko avaruuden E kannaksi $L \supset K$. Osoitetaan, että "uusien" kantavektorien virittämä aliavaruus $F = \langle L \setminus K \rangle$ on yksiulotteinen: Kannan avulla määritelty projektio avaruudelta E aliavaruudelle F

$$\varphi : E \to F : \sum_{x \in L} \alpha_x x \mapsto \sum_{x \in L \setminus K} \alpha_x x$$

on edellisen lemman mukaan avoin lineaarikuvaus $E \to F$ ja kuvaa siis joukon A avoimeksi, konveksiksi joukoksi $\varphi(A) \subset F$. Origo ei kuulu joukkoon $\varphi(A)$, sillä $\varphi^{-1}(0) = H$ ja $H \cap A = \emptyset$.

Jos F olisi vähintään kaksiulotteinen, niin tarkastelisimme sen jotain kaksiulotteista aliavaruutta G, jolloin $G \cap \varphi(A)$ olisi avoin ja konveksi ja $0 \in G \setminus \varphi(A)$. Kaksiulotteisessa avaruudessa G olisi tietenkin olemassa yksiulotteinen aliavaruus S, joka ei leikkaisi joukon A kuvajoukkoa $\varphi(A)$. Silloin olisi

$$M \subset H = \varphi^{-1}(0) \subsetneq \varphi^{-1}(S)$$

[21] Mutta ei aina jatkuva, ks. 0.0.39.

[22] Zornin lemma sanoo juuri, että näin voi tehdä. Max August Zorn 1906–1993, Saksa. Ks. [1] .

ja

$$\varphi^{-1}(S) \cap A = \emptyset$$

joten aliavaruus $\varphi^{-1}(S)$ rikkoisi hypertason H maksimaalisuutta. Kannan avulla konstruoimamme aliavaruus F on siis yksiulotteinen ja H on hypertaso.

Löydetty hypertaso H ei ole tiheä, koska se ei leikkaa avointa joukkoa A. Siksi se on suljettu.

Näin on reaalinen versio todistettu. Kompleksinen versio palautuu reaaliseen, sillä kompleksikertoiminen normiavaruus on luonnollisesti samalla reaalikertoiminen. Näin on olemassa reaalisessa mielessä hypertaso $H \supset M$, joka ei leikkaa joukkoa A Nyt joukko

$$H \cap iH$$

on kompleksisessa mielessä aliavaruus ja selvästi maksimaalinen aito sellainen eli kompleksinen hypertaso. Sekään ei tietenkään leikkaa joukkoa A ja sekin on suljettu. $\square$

Esitämme samantien seurauslauseen, joka usein oppikirjoissa todistetaan seurauksena Hahnin ja Banachin lauseesta. (Ks. myös 3.8)

Seuraus 3.3. *Olkoon E lokaalikonveksi avaruus ja F sen suljettu aliavaruus sekä $x_0 \in E \setminus F$. Tällöin on olemassa jatkuva lineaarimuoto $x^* \in E^*$ siten, että*

$$\begin{aligned} \langle x_0, x^* \rangle &= 1 \quad \textit{ja} \\ \langle y, x^* \rangle &= 0 \quad \textit{kaikilla } y \in F. \end{aligned}$$

Todistus. Sovelletaan ensin lineaarimuotoon $0 \in F^*$ Mazurin laajennuslausetta valiten avoimeksi konveksiksi joukoksi jokin aliavaruutta F leikkaamaton pisteen x_0 konveksi ympäristö U, jollainen on lokaalikonveksissa avaruudessa olemassa. Saadaan avaruuden E suljettu hypertaso eli jonkin jatkuvan lineaarimuodon ydin $\operatorname{Ker} f \supset F$, jolla $U \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$, erityisesti $f(x_0) \neq 0$. Valitaan $x^* = \frac{f}{f(x_0)}$. Se kelpaa. $\square$

Lause 3.4. (Banachin erottelulause) *Olkoot A ja B topologisen vektoriavaruuden erillisiä konvekseja joukkoja, joista A avoin. Silloin on olemassa jatkuva lineaarimuoto f ja reaaliluku α siten, että f:n reaaliosalle pätee:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &< \alpha \quad \forall x \in A \textit{ ja} \\ \operatorname{Re} f(x) &\geq \alpha \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

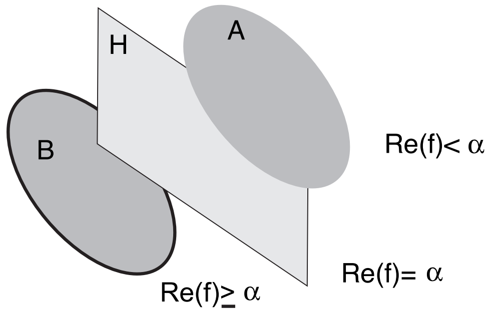
Todistus. Olkoon aluksi E reaalikertoiminen. Osoitetaan aluksi, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $f : E \to \mathbb{R}$, joka *erottaa* joukot A ja B. Tällä tarkoitamme, että

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

Voimme olettaa, että joukot ovat epätyhjiä. Erotusten joukko

$$C = A - B = \{a - b \mid a \in A,\, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

on avoin, konveksi eikä sisällä origoa. Sovellamme Mazurin lausetta siihen ja aliavaruuteen $M = \{0\}$. Saamme origon kautta kulkevan suljetun hypertason H, joka ei leikkaa joukkoa C. On olemassa jokin lineaarimuoto — olkoon se f — jonka ydin on



KUVA 7. Banachin erottelulause

H. Koska H on suljettu, f on jatkuva. Lisäksi H erottaa joukot A ja B, sillä jos $a \in A$ ja $b \in B$ siten, että $f(a) = f(b)$, niin $(a-b) \in (A-B) \cap \operatorname{Ker} f = (A-B) \cap H = \emptyset$.

Koska f on jatkuva lineaarimuoto, niin $f(A)$ on huomautuksen 1.31 nojalla avoin. Konvekseina joukkoina $f(A)$ ja $f(B)$ ovat yhtenäisiä reaalilukujoukkoja eli välejä, joten vaihtamalla tarvittaessa f:n tilalle $-f$ löydetään reaaliluku α siten, että

$$\begin{aligned} & f(x) < \alpha \quad \forall x \in A \\ \text{ja} \quad & f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Banachin erottelulauseen kompleksinen tapaus palautuu reaaliseen, kun huomaa, että jokainen kompleksikertoiminen vektoriavaruus E on samalla reaalikertoiminen vektoriavaruus. Pienellä laskulla voi tarkastaa, että jos $f : E \to \mathbb{C}$ on kompleksilineaarinen, niin sen reaaliosa

$$g : E \to \mathbb{R} : g(x) = \operatorname{Re} f(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)})$$

on reaalilineaarinen — yleensä ei tietenkään kompleksilineaarinen. Toisaalta jokainen kompleksisessa vektoriavaruudessa määritelty reaalilineaarimuoto $g : E \to \mathbb{R}$ on siitä muodostetun kompleksilineaarisen kuvauksen

$$f : E \to \mathbb{C} : x \mapsto g(x) - ig(ix)$$

reaaliosa. E:n reaali- ja kompleksilineaarimuotojen joukot ovat siis tässä mielessä samat. Myös on selvää, että f ja g ovat yhtä aikaa jatkuvat. □

3.2. **Hahnin ja Banachin lause.**

Sekä Mazurin laajennuslause että Banachin erottelulause ovat olennaisesti yhtäpitäviä Hahnin[23] ja Banachin lauseen kanssa, josta ne on yleensä tapana johtaa funktionaalianalyysin oppikirjoissa.

Lause 3.5. (Hahn ja Banach 1927-29)[24] *Olkoon $F \subset E$ vektoriavaruuden aliavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f aliavaruudessa F määritelty lineaarimuoto, jolla*

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in F.$$

[23]Hans Hahn 1879–1934, Itävalta.

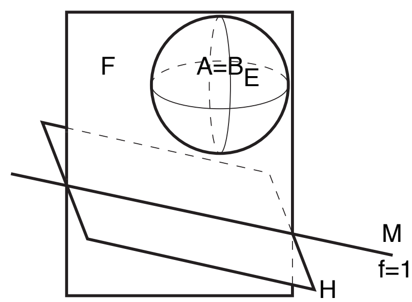
[24]Kompleksiversio Bohnenblust, tämän oppilas Sobzyk ja erikseen Suhomlinov, kummatkin v. 1938. H. Frederic (Henri) Bohnenblust USA, Andrew F. Sobczyk 1915 – , USA, G.A. Suhomlinov, Neuvostoliitto.

Tällöin on olemassa koko avaruudessa E määritelty lineaarimuoto $g : E \to \mathbb{K}$, jolle

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad \forall x \in F \quad \textit{ja} \\ |g(x)| &\leq p(x) \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $f \neq 0$. Käytetään Mazurin laajennuslausetta. Valitaan seminormiavaruudessa (E, p) konveksiksi, avoimeksi joukoksi seminormin p avoin yksikkösemipallo $B_E = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ ja E:n affiiniksi aliavaruudeksi avaruuden F hypertaso

$$M = \{x \in F \mid f(x) = 1\}.$$



Kuva 8. Hahnin ja Banachin lauseen todistus

Mazurin laajennuslause antaa avaruuden E suljetun hypertason $H \supset M$, joka ei leikkaa yksikkösemipalloa B_E. Koska $H \cap F$ sisältää avaruuden F hypertason M, mutta ei yhdy koko aliavaruutta F (joka tietenkin leikkaa semipalloa B_E), niin $H \cap F = M$. Määritellään g avaruuden E lineaarimuodoksi, joka saa hypertasossa H arvon 1. Se täyttää vaatimukset. □

Huomautus 3.6. (Yleistys) Hahnin ja Banachin lause todistettiin seminormiavaruudessa (E, p). Reaalikertoimisessa tapauksessa riittää olettaa, että seminormin p roolissa on pelkkä ei-negatiivinen sublineaarikuvaus 3.6 eli vaaditaan homogeenisuus $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ainoastaan positiivisille λ.

Tämä muoto Hahnin ja Banachin lauseesta on tunnetuin ja se on useimmissa kirjoissa tapana todistaa suoraan Zornin lemman avulla. Sen voi kyllä todistaa Mazurin laajennuslauseestakin, jota tosin joudutaan yleistämään; laajennuslauseessa ei nimittäin tarvita topologiaa, vaan riittää olettaa, että joukko on algebrallisesti avoin (harjoitustehtävä 0.0.35).

Huomautus 3.7. (Erikoistapaus) Jos $p = \|\cdot\|$ on normi, niin Hahnin ja Banachin lauseen oletus merkitsee, että lineaarimuoto $f : F \to \mathbb{K}$ on normialiavaruudessa F jatkuva ja sen normi $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ on enintään 1. Hahnin ja Banachin lause sanoo tässä tilanteessa, että lineaarimuoto f voidaan jatkaa koko avaruuden lineaarimuodoksi g, jolla myös on enintään normi 1. Erityisesti g on jatkuva. Yksinkertaisella skaalauksella seuraa, että normiavaruuden aliavaruuden jatkuvalla lineaarimuodolla on siis aina olemassa laajennus koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi, jolla on sama normi. Seuraava seuraus on tämän normiavaruuslauseen lokaalikonveksi versio.

Seuraus 3.8. (Hahnin ja Banachin lause jatkuvalle lineaarimuodolle lokaalikonveksissa avaruudessa) *Olkoon $F \subset E$ lokaalikonveksin topologisen vektoriavaruuden aliavaruus ja $f : F \to \mathbb{K}$ aliavaruudessa F määritelty jatkuva lineaarimuoto. Tällöin on olemassa koko avaruudessa E määritelty jatkuva lineaarimuoto $g : E \to \mathbb{K}$, jolle $g(x) = f(x) \quad \forall x \in F$.*

Jos $x_0 \in E \setminus \overline{F}$, voidaan g lisäksi valita siten, että $g(x_0) = 1$.

Todistus. Oletuksen mukaan $F \subset E$ on lokaalikonveksin avaruuden $E = (E, \mathcal{P})$ aliavaruus. Tällöin F on myös lokaalikonveksi, sillä lauseen 2.12 mukaan avaruuden F topologia saadaan seminormien $p \in \mathcal{P}$ rajoittumista ja itse asiassa jokainen aliavaruuden F jatkuva seminormi on koko avaruudessa E määritellyn jatkuvan seminormin rajoittuma.

Oletettiin, että $f : F \to \mathbb{K}$ on aliavaruudessa F määritelty jatkuva lineaarimuoto, joten on olemassa seminormi $p \in \mathcal{P}$ siten, että

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in F.$$

Hahnin ja Banachin lauseen 3.5 mukaan on olemassa avaruudessa E määritelty lineaarimuoto, jolla $f(x) = g(x)$ aliavaruudessa F ja $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$. Selvästi g on jatkuva.

Jos $x_0 \in E \setminus \overline{F}$, on lineaarimuodolla $\frac{g}{g(x_0)}$ halutut arvot, mikäli $g(x_0) \neq 0$. Jos taas $g(x_0) = 0$, valitaan seurauksen 3.3 mukainen jatkuva lineaarimuoto $x^* \in E^*$ siten, että $x^*(x_0) = 1$ ja $x^*(y) = 0$ kaikilla $y \in F$, jolloin lineaarimuodolla $g + x^*$ on halutut arvot. $\square$

Huomautus 3.9. Hahnin ja Banachin lauseessa maaliavaruutena on $\mathbb{K}$. Tietenkin sen tilalla voi olla mikä tahansa yksiulotteinen avaruus. Tarkastelemalla koordinaatteja erikseen huomaa, että jatkuvan lineaarikuvauksen voi jatkaa aliavaruudesta koko avaruuteen, kunhan maalipuolella on äärellisulotteinen avaruus. Lause ei enää yleisty, jos maalipuoli on ääretönulotteinen.

Mazurin laajennuslause, Banachin erottelulause ja Hahnin ja Banachin lause yleistyivät siis todistuksineen myös topologisiin vektoriavaruuksiin, mutta on syytä huomata, että seuraus 3.8 ei päde yleisessä topologisessa vektoriavaruudessa. Esimerkkinä voi mainita, että topologisen vektoriavaruuden jatkuvien lineaarimuotojen joukko, eli sen topologinen duaali, saattaa olla pelkkä $\{0\}$, kuten on asian laita esimerkiksi ääretönulotteisilla ℓ^p-avaruuksilla, kun $0 < p < 1$.

Hahnin ja Banachin lauseen avulla voidaan siis jatkuva lineaarimuoto laajentaa lokaalikonveksin avaruuden aliavaruudesta koko avaruuteen. Lause on siinä mielessä syvällinen, että sen todistus edellytti valinta-aksiooman, käytännössä Zornin lemman soveltamista. Vastaavanlainen laajennuslause seminormeille 2.11 ei edellyttänyt valinta-aksioomaa.

4. Metrisoituvuudesta ja täydellisyydestä. Frèchet'n avaruudet.

Erottelulauseiden ohella toinen tärkeä funktionaalianalyysin periaate on Baire'in kategorialause seurauksineen, joita ovat ennen kaikkea avoimen kuvauksen lause 4.17, suljetun kuvaajan lause 4.19 ja Banachin ja Steinhausin tasaisen rajoituksen periaate 4.24.

Baire'in kategorialause käsittelee yleisiä metrisiä avaruuksia eikä välittömästi ollenkaan liity lineaariseen struktuuriin eikä normiin. Esitämme täydellisyyden(!) vuoksi Baire'in lauseen todistuksineen. Sitten tarkastelemme sen oletuksia, siis täydellisyyttä ja metrisoituvuutta, topologisissa vektoriavaruuksissa ja lopuksi johdamme päätulokset, etenkin edellä mainitut avoimen kuvauksen lauseen, suljetun kuvaajan lauseen ja tasaisen rajoituksen periaatteen.

4.1. **Baire'in kategorialause.**

Määritelmä 4.1. Olkoon X topologinen avaruus.

(1) Osajoukko $M \subset X$ on *tiheä* avaruudessa X, jos $\overline{M} = X$.
(2) Joukko $M \subset X$ on *harva*, eli *ei missään tiheä* avaruudessa X, jos sen sulkeuma on sisäpisteetön, eli jos sen sulkeuman komplementti $X \setminus \overline{M}$ on tiheä: $\overline{X \setminus \overline{M}} = X$. Erityisesti suljettu joukko on harva avaruudessa X tasan ollessaan sisäpisteetön.
(3) Joukko $M \subset X$ kuuluu avaruudessa X *Baire'in ensimmäiseen kategoriaan,*[25] jos se on yhdiste numeroituvan monesta avaruudessa X harvasta joukosta.[26]
(4) Joukko $M \subset X$ kuuluu avaruudessa X *Baire'in toiseen kategoriaan*, jos se ei kuulu ensimmäiseen.

Baire'in kategorialause sanoo, että mikään täydellinen metrinen avaruus, erityisesti mikään Banachin avaruus ei ole itsensä 1. kategorian osajoukko. Todistus[27] perustuu seuraavaan lemmaan:

Lemma 4.2. (Cantor) *Metrinen avaruus (X,d) on täydellinen aina ja vain, kun sillä on ns.* sisäkkäisten suljettujen joukkojen ominaisuus*: Jos sisäkkäiset epätyhjät joukot* $X \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$ *ovat suljettuja ja* $\operatorname{diam}(S_n) \to 0$*, niin silloin*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \emptyset.$$

Tässä $\operatorname{diam}(S)$ *on joukon* S halkaisija*, so.* $\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in S\}$.

Todistus. Olkoon aluksi X täydellinen ja suljetut joukot S_n oletuksen mukaisia. Valitsemalla kullekin $n \in \mathbb{N}$ alkio $x_n \in S_n$ saadaan Cauchy-jono[28], jonka raja-arvo on joukkojen S_n leikkauksessa.

---

[25] Sanalla kategoria on muitakin merkityksiä, joskaan ei tässä yhteydessä. René-Louis Baire 1874–1932, Ranska.
[26] Toisinaan 1. kategorian joukkoa sanotaan *laihaksi* joukoksi.
[27] Sama kuin [1] lauseen 19.6.
[28] Augustin Louis Cauchy 1789–1857, Ranska.

Olkoon sitten lauseen ehto voimassa. Todistetaan, että avaruuden X mielivaltainen Cauchy-jono (x_n) suppenee. Valitsemalla

$$S_n = \overline{\{x_m \mid m \geq n\}}$$

saa Cantorin[29] lemman 4.2 ehdot voimaan ja huomaa, että leikkauksen alkio on jonon raja-arvo. □

Baire'in kategorialause on helpointa todistaa komplementaarisessa muodossa eli seuraavan lemman hahmossa.

Lemma 4.3. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja A_n jono sen avoimia ja tiheitä osajoukkoja. Tällöin leikkaus*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

on tiheä, erityisesti epätyhjä.

Todistus. Olkoon $B(x,r)$ avaruuden X jokin avoin pallo. On osoitettava, että

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Koska A_1 on tiheä ja $B(x,r)$ avoin, niin leikkaus $A_1 \cap B(x,r)$ on epätyhjä ja kahden avoimen joukon leikkauksena avoin. On siis olemassa pallo $B(x_1,r_1)$, jonka sulkeuma S_1 sisältyy joukkoon $A_1 \cap B(x,r)$. Koska myös A_2 on tiheä ja $B(x_1,r_1)$ avoin, niin leikkaus $A_1 \cap B(x_1,r_1)$ on epätyhjä ja kahden avoimen joukon leikkauksena avoin. On siis olemassa pallo $B(x_2,r_2)$, jonka sulkeuma S_2 sisältyy joukkoon $A_2 \cap B(x_1,r_1)$. Näin jatketaan. Saadaan jono sisäkkäisiä suljettuja palloja S_n. Mikään ei estä valitsemasta säteitä r_n siten, että $r_n \to 0$. Cantorin täydellisyyslemma 4.2 takaa nyt, että

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset.$$

Tästä väite seuraa. □

Lause 4.4. (Baire'in kategorialause) *Täydellinen metrinen avaruus X on itsensä osajoukkona toista kategoriaa.*

Todistus. Lause on toinen muoto lemmalle 4.3. Antiteesi: Olkoon X numeroituva yhdiste harvoista joukoista

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}, \text{ ts.}$$
$$\emptyset = X \setminus X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \overline{M_n}).$$

Joukot $X \setminus \overline{M_n}$ ovat avoimia ja tiheitä. Lemma 4.3 sanoo, että niiden leikkaus on epätyhjä. Antiteesi on väärä. □

[29]Georg Cantor 1845–1918, Saksa.

4.2. **Metrisoituvat lokaalikonveksit avaruudet.**

Voimme aluksi todeta, että Baire'in kategorialauseen mukaan erityisesti sellainen topologinen vektoriavaruus on toista kategoriaa, jonka topologia saadaan jostakin metriikasta ja avaruus on tässä metriikassaan täydellinen. Tämä havainto on kuitenkin jokseenkin hyödytön ellei ole tapaa todeta avaruuden metrisoituvuutta ja täydellisyyttä metriikassaan. On kuitenkin mahdollista tunnistaa *metrisoituvia* topologisia vektoriavaruuksia, ja niitä on olemassa monenlaisia muitakin kuin normiavaruudet. Tärkeimpiä ovat lokaalikonveksit metrisoituvat avaruudet, joille on seuraava mukava karakterisointi:

Lause 4.5. *Olkoon $(E, \mathcal{T})$ topologinen vektoriavaruus, jonka lisäksi oletamme olevan lokaalikonveksi ja Hausdorff. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *On olemassa topologian $\mathcal{T}$ origon ympäristökanta $\mathcal{K}_0$, joka on numeroituva.*
(ii) *On olemassa topologian $\mathcal{T}$ määrittelevä perhe seminormeja $\mathcal{Q}$, joka on numeroituva.*
(iii) *Topologian $\mathcal{T}$ voi määritellä seminormiperheellä $\mathcal{P}$, joka on numeroituva ja järjestetty kasvavaksi jonoksi: $p_1 \leq p_2 \leq \dots$.*
(iv) *Avaruudessa E on olemassa metriikka d, joka on* siirto- *eli* translaatioinvariantti

$$d(x, y) = d(x + z, y + z) \quad \forall\, x, y, z \in E,$$

ja jonka topologia on $\mathcal{T}$.
(v) *Avaruudessa E on olemassa metriikka d, jonka topologia on $\mathcal{T}$.*

Sanomme tällöin, että E on metrisoituva lokaalikonveksi avaruus*.*

Todistus. Olennainen kohta todistuksessa on askel *iii)→ iv)*. Todistamme sen. Esitämme todistuksen, jonka on keksinyt Stefan Banach: Jos $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$, niin metriikaksi kelpaa

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}.$$

Oletimme, että tutkittava lokaalikonveksi avaruus on Hausdorff, joten huomautuksen 2.9 mukaan $x = 0$ tasan silloin, kun $p(x) = 0$ kaikilla $p \in \mathcal{P}$. Tästä saadaan heti metriikan d definiittisyys. Sarjan suppeneminen ja kolmioepäyhtälö puolestaan seuraavat siitä, että $f : [0, \infty[\to [0, 1[: t \mapsto \frac{t}{1+t}$ on kasvava funktio ja sen toinen derivaatta on negatiivinen, joten $f(t_1 + t_2) \leq f(t_1) + f(t_2)$.

Paluuehtoa *v)→ i)* todistettessa E on metrisoituva ja valitaan origolle metriikan palloympäristöjen jono

$$B_n = B_d(0, \tfrac{1}{n}).$$

Se on topologian $\mathcal{T}$ numeroituva origon ympäristökanta. □

Esimerkki 4.6. *Banachin jonoavaruus $E = \{x = (x_n)_{\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ seminormein $p_k(x) = |x_k|$ on metrisoituva.*

4.3. **Fréchet'n avaruudet.**

Baire'in lause takaa siis erityisesti, että metriikan d mielessä täydellinen metrisoituva lokaalikonveksi avaruus eli "Fréchet'n avaruus" on toista kategoriaa. Lokaalikonveksin avaruuden metrisoituvuus on edellä esitetyn nojalla helppo tarkastaa. Sen sijaan edellä määritellyn siirtoinvariantin metriikan d täydellisyyden tarkastaminen on jo hankalampaa. Siksi topologisen vektoriavaruuden Cauchy-jonot ja jonotäydellisyys määritellään seuraavassa uudelleen suoraan, metriikkaa nimeämättä, ja todistetaan lauseena, että on saatu samat käsitteet kuin Banachin siirtoinvariantilla metriikallakin olisi saatu.

Huomaamme myöhemmin tosin, että edes näihin uudenlaisiin Cauchy-jonoihin perustuva täydellisyyskäsite ei oikein toimi metrisoitumattomassa avaruudessa. Nyt Baire'in kategorialauseen yhteydessä on kuitenkin puhe nimenomaan metrisoituvista avaruuksista, joten lykkäämme yleistykset kappaleeseen 4.5.

Määritelmä 4.7. Määritellään topologiseen vektoriavaruuteen Cauchy-jonon ja jonotäydellisyyden käsitteet:

(1) Topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T})$ jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Cauchy-jono*, mikäli jokaista origon ympäristöä $U \in \mathcal{U}_0$ kohti on olemassa luku $n_U \in \mathbb{N}$, jolle
$$n, m > n_U \implies (x_n - x_m) \in U.$$

(2) Topologisen vektoriavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *jonotäydellinen*, mikäli sen jokainen Cauchy-jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti jotain joukon A pistettä;

Lause 4.8. *Metrisoituvan lokaalikonveksin avaruuden jono on Cauchy- jono edellisen määritelmän 4.7 mielessä täsmälleen ollessaan Cauchy-jono edellä lauseen 4.5 todistuksessa määrittelemämme Banachin metriikan d mielessä.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.31. □

Metrisoituva lokaalikonveksi avaruus $(E, \mathcal{P})$ on siis jonotäydellinen topologisena vektoriavaruutena aina ja vain ollessaan (jono)täydellinen Banachin metriikan d mielessä.

Määritelmä 4.9. Määritelmän 4.7 mielessä täydellistä metrisoituvaa lokaalikonveksia avaruutta sanotaan *Fréchet-avaruudeksi*.[30]

Seuraus 4.10. *Fréchet-avaruuden isomorfinen kuva on Fréchet-avaruus.*

Todistus. Topologisten *vektoriavaruuksien välinen isomorfisuus* tarkoittaa, että niiden välillä on lineaarinen homeomorfismi. Metrisen avaruuden Cauchy-jonon käsite ei säily mielivaltaisessa homeomorfismissa,[31] vaan vaatii säilyäkseen tasaisen jatkuvuuden metriikan mielessä. Edellinen lause sisältää kuitenkin hieman piilossa tarvittavan tasaisuustiedon, ja voimme menetellä vaikkapa seuraavasti:

Olkoon $T : E \to F$ topologisten avaruuksien välinen isomorfismi ja E Fréchet-avaruus. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono avaruudessa F. Lauseen 4.8 mukaan tämä

[30] Toisissa kirjoissa $\mathcal{F}$-avaruus

[31] Esimerkki: $\mathbb{R}$:n metriikat $|x - y|$ ja $|\overline{\arctan}\, x - \overline{\arctan}\, y|$ antavat eri Cauchy-jonot, mutta saman topologian.

voidaan tulkita määritelmän 4.7 mielessä. Koska T^{-1} on topologisten vektoriavaruuksien isomorfismi, niin $(T^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono avaruudessa E, siis oletuksen mukaan suppeneva, jolloin myös $(T(T^{-1}x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. □

Lause 4.11. (Lineaarikuvauksen jatko täydentymään) *Olkoot E ja F lokaalikonvekseja metrisoituvia topologisia vektoriavaruuksia, joista F täydellinen, siis Fréchet-avaruus. Olkoon $A \subset E$ tiheä aliavaruus ja $T : A \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Silloin on olemassa tasan yksi jatkuva lineaarikuvaus $S : E \to F$, jonka rajoittuma avaruuteen A on T.*

Perustelu. Jatkon yksikäsitteisyys seuraa siitä, että Hausdorff-arvoiset tiheässä joukossa yhtyvät jatkuvat funktiot yhtyvät kaikkialla. Olemassaolon todistaminen tapahtuu tunnetulla konstruktiolla Cauchy-jonoilla. [32] □

Huomautus 4.12. Fréchet'n avaruuden E tekijäavaruus E/H suljetun aliavaruuden $H \subset E$ suhteen on Fréchet-avaruus (Lause 5.4).

4.4. **Baire'in kategorialauseen seurauksia.**

Baire'in kategorialause 4.4 takaa erityisesti, että jokainen Fréchet'n avaruus on toista kategoriaa. Tästä seuraa, että normiavaruusteorian yhteydessä esittämämme lauseet pätevät pitkälti myös Fréchet-avaruuksissa:

Lause 4.13. (Tynnyrilause) *Fréchet-avaruudessa jokainen tynnyri on origon ympäristö.*

Todistus. Olkoon $T \subset E$ tynnyri eli balansoitu, konveksi, absorboiva ja suljettu osajoukko. Koska T on konveksi ja absorboiva, niin $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT$ ja siis Baire'in lauseen mukaan ainakin yhdellä joukoista nT on sisäpiste. Homotetiainvarianssin mukaan myös T:llä on sisäpiste, olkoon se x. Koska T on balansoitu, niin myös $-x$ on T:n sisäpiste ja siis sisuksen konveksiuden [vrt. 1.18] vuoksi $0 \in \operatorname{Int} T$. □

Määritelmä 4.14. Lokaalikonveksi topologinen vektoriavaruus, jossa jokainen tynnyri on origon ympäristö, on *tynnyriavaruus*.

Tynnyrilause 4.13 sanoo siis, että jokainen Fréchet-avaruus on tynnyriavaruus.

Seuraavat kaksi lemmaa tarvitaan avoimen kuvauksen lauseen todistamiseen.

Lemma 4.15. *Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen surjektio lokaalikonveksilta avaruudelta tynnyriavaruudelle ja $U \in \mathcal{U}_E$ origon ympäristö. Tällöin ympäristön U kuvajoukon sulkeuma $\overline{T(U)}$ on origon ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Voidaan olettaa, että U on absorboiva, balansoitu ja konveksi, jolloin T:n lineaarisuuden perusteella myös $T(U)$ on balansoitu ja konveksi, samoin sen sulkeuma $\overline{T(U)}$.

Koska U on absorboiva, ja T lineaarinen surjektio, niin $T(U)$ on absorboiva, samoin siis $\overline{T(U)}$. On näytetty, että $\overline{T(U)}$ on tynnyri, oletuksen mukaan siis origon ympäristö. □

[32] Itse asiassa ei tarvitse olettaa mitään metrisoituvuudesta, mutta silloin tarvitaan yleinen täydellisyyskäsite 4.5. Yleinen konstruktio on tietenkin tehtävä Cauchy-filttereillä. Ks. tehtävä 0.0.56.

Lemma 4.16. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X täydellinen, ja olkoon $f : X \to Y$ jatkuva ja*

$$\forall r > 0 \; \exists s_r > 0 \text{ s.e. } \forall x \in X : B(f(x), s_r) \subset \overline{f(B(x,r))}.$$

Silloin

$$\forall r' > r > 0 \, \forall x \in X : B(f(x), s_r) \subset f(B(x, r')).$$

Todistus. Olkoon $r' > r > 0$. Valitaan luvut $r = r_1 > r_2 > \cdots > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa luvut $s_r = s_1 > s_2 > \cdots > 0$ siten, että $s_n \to 0$ ja kaikille $x \in X$:

$$B(f(x), s_n) \subset \overline{f(B(x, r_n))}.$$

Olkoon $x_0 \in E$. Merkitään $y_0 = f(x_0)$ ja väitetään, että $B(y_0, s_1) \subset f(B(x_0, r'))$. Olkoon siis $y \in B(y_0, s_1)$. On osoitettava, että $y \in f(B(x_0, r'))$ eli löydettävä $x \in B(x_0, r')$ siten, että $f(x) = y$. Löydämme pisteen x konstruoimalla X:ssä Cauchy-jono $(x_n)_{\mathbb{N}}$ siten, että $f(x_n) \to y$, jolloin avaruuden X täydellisyyden nojalla on olemassa raja-arvo $x = \lim x_n \in X$ ja funktion f jatkuvuuden nojalla on $f(x) = y$. Huolehdimme vielä siitä, että kaikilla n on $d(x_n, x_0)$ tasaisesti aidosti alle r', jotta saamme $d(x, x_0) < r'$.

Tarvittava Cauchy-jono konstruoidaan näin: Luvun s_1 määritelmän mukaan $y \in B(y_0, s_1) \subset \overline{f(B(x_0, r_1))}$, joten on olemassa piste $x_1 \in B(x_0, r_1)$ siten, että $d(f(x_1), y) < s_2$, ja siis $f(x_1) \in B(y, s_2) \subset \overline{f(B(x_0, r_2))}$.
Vastaavasti $\exists x_2 \in B(x_1, r_2)$ s.e. $d(f(x_2), y) < s_3$, eli $f(x_2) \in B(y, s_3) \subset \overline{f(B(x_0, r_3))}$.
$\ldots$
$\exists x_n \in B(x_{n-1}, r_n)$ s.e. $f(x_n) \in B(y, s_{n+1}) \subset \overline{f(B(x_0, r_{n+1}))}$.
$\ldots$

Valitsemalla alussa luvut r_k edullisesti voidaan huolehtia siitä, että $(x_n)_{\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono, sillä riittävän suurella n ja kaikilla m on

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\le r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots + r_{n+m} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k < \varepsilon, \end{aligned}$$

mikäli alkuperäiset luvut r_k on valittu siten, että $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$, mikä tietenkin on mahdollista.

Olkoon $x = \lim x_n \in E$. Nyt $f(x_n) \to y$, sillä $d(f(x_n), y) < s_{n+1} \to 0$.

Voidaan vielä huolehtia siitä, että $d(x, x_0) < r'$, sillä

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &\le d(x_n, x_{n-1}) + \cdots + d(x_1, x_0) \\ &\le r_{n-1} + r_{n-2} + \cdots + r_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} r_k < r', \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö voidaan saada toteutumaan valitsemalla alussa luvut $r = r_1 > r_2 > \cdots > 0$ siten, että $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$. □

Lause 4.17. (Avoimen kuvauksen lause) *Jatkuva lineaarinen surjektio Fréchet'n avaruudelta toiselle on avoin kuvaus.*

Todistus. Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarinen surjektio Fréchet'n avaruudelta toiselle. Tynnyrilauseen 4.13 ja lemman 4.15 nojalla $\overline{T(U)}$ on origon ympäristö avaruudessa F aina, kun $U \in \mathcal{U}_E$. Koska tutkittavat avaruudet ovat metrisiä ja T on jatkuva, niin

$$\forall r > 0\, \exists s_r > 0 \text{ siten, että } B(0, s_r) \subset \overline{T(B(0,r))}.$$

Koska metriikka voidaan valita siirtoinvariantiksi ja T on lineaarinen, niin

$$\forall r > 0\, \exists s > 0 \text{ siten, että kaikille } x \in X : B(T(x), s) \subset \overline{T(B(x,r))}.$$

Silloin lemman 4.16 nojalla

$$\forall r' > r > 0\, \exists s' > 0 \text{ siten, että kaikille } x \in X : B(T(x), s') \subset T(B(x,r')). \tag{4.1}$$

Erityisesti $B(0, s') \subset T(B(0, r')) \subset T(U)$, joten jokaisen origon ympäristön kuva on origon ympäristö ja lineaarikuvaus T siis lauseen 1.5 mukaan avoin. □

Seuraus 4.18. *a) Jatkuva lineaarinen bijektio Fréchet'n avaruudelta toiselle on homeomorfismi, siis topologisten vektoriavaruuksien isomorfismi.*

b) Jatkuva lineaarinen kuvaus Fréchet'n avaruudelta toiselle on avoin kuvaus kuvajoukolleen, (jossa oletetaan aliavaruustopologia) aina ja vain, kun kuvajoukko on suljettu.

Todistus. Kohta a) seuraa välitömästi avoimen kuvauksen lauseesta 4.17. Kohta b) seuraa nyt siitä, että täydellisessä metrisessä avaruudessa osajoukko on (jono)täydellinen tasan ollessaan suljettu. □

Lause 4.19. (Suljetun kuvaajan lause) *Lineaarikuvaus $T : E \to F$ Fréchet'n avaruudelta toiselle on jatkuva aina ja vain, kun sen kuvaaja*

$$\operatorname{Gr} T = \{(x, Tx) \in E \times F \mid x \in E\}$$

on tuloavaruuden $E \times F$ suljettu osajoukko.

Todistus. Tuloavaruus $E \times F$ on tietenkin metrisoituva ja (jono)täydellinen, siis Fréchet'n avaruus. Kuvaaja $\operatorname{Gr} T$ on sen aliavaruus. Jos $\operatorname{Gr} T$ on suljettu, niin sekin on täydellinen, siis Fréchet'n avaruus. Merkitään tuloon liittyviä projektioita $\pi_E : \operatorname{Gr} T \to E : (x, Tx) \mapsto x$ ja $\pi_F : \operatorname{Gr} T \to F : (x, Tx) \mapsto Tx$. Lineaarikuvaus $\pi_E : \operatorname{Gr} T \to E$ on jatkuva bijektio Fréchet'n avaruudelta toiselle, siis avoimen kuvauksen lauseen version 4.18 mukaan isomorfismi, joten sen käänteiskuvaus $\pi_E^{-1} : E \to \operatorname{Gr} T : x \mapsto (x, Tx)$ on jatkuva. Siis $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ on jatkuva.

Toisensuuntainen implikaatio on triviaali, sillä minkä tahansa jatkuvan kuvauksen kuvaaja on suljettu, kun maalipuolen topologinen avaruus on Hausdorff. □

Seuraus 4.20. (Suljetun kuvaajan lauseen jonomuoto) *Lineaarikuvaus $T : E \to F$ Fréchet'n avaruudelta toiselle on jatkuva aina ja vain, kun kaikilla jonoilla $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ pätee*

$$(x_n, Tx_n) \to (0, y) \implies y = 0.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.38.

Baire'in kategorialauseesta saatu tynnyrilause 4.13 on avain edellisten lisäksi myös tasaisen rajoituksen periaatteen 4.24 todistukseen. Tasaisen rajoituksen periaate koskee ns. yhtäjatkuvia kuvausperheitä ja rajoitettuja joukkoja. Rajoitettuja joukkoja käsitellään enemmän luvussa 6. Seuraavassa tarvitaan vain määritelmä.

Määritelmä 4.21. Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $R \subset E$. Sanomme, että R on *rajoitettu*, mikäli jokainen origon ympäristö *absorboi* sen:

$$\forall U \in \mathcal{U}_0 \quad \exists \lambda > 0 : \quad R \subset \lambda U.$$

Huomautus 4.22. Perusesimerkkejä rajoitetuista joukoista ovat äärellinen joukko, suppeneva jono ja kompakti joukko.

Jatkuva lineaarikuvaus kuvaa rajoitetun joukon rajoitetuksi joukoksi.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.60. □

Määritelmä 4.23. Olkoot E ja F topologisia vektoriavaruuksia ja

$$\mathcal{Y} \subset L(E, F)$$

perhe niiden välisiä lineaarikuvauksia.

(a) $\mathcal{Y}$ on *pisteittäin rajoitettu*, mikäli se kuvaa pisteet rajoitetuiksi joukoiksi eli

$$\forall x \in E : \mathcal{Y}(x) = \{Tx \mid T \in \mathcal{Y}\} \text{ on rajoitettu.}$$

(b) Sanomme, että kaikki perheeseen $\mathcal{Y}$ kuuluvat kuvaukset ovat *yhtä jatkuvia*, eli itse perhe $\mathcal{Y}$ on *yhtäjatkuva*, mikäli kaikilla ympäristöillä $A \in \mathcal{U}_F$ on olemassa ympäristö $B \in \mathcal{U}_E$ siten, että kaikilla $T \in \mathcal{Y}$ on $T(B) \subset A$.

Lause 4.24. (Banachin ja Steinhausin[33] lause eli tasaisen rajoituksen periaate) *Olkoon E Fréchet'n avaruus ja F lokaalikonveksi topologinen vektoriaaruus ja*

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{L}(E, F)$$

perhe niiden välisiä jatkuvia lineaarikuvauksia. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) $\mathcal{Y}$ *on pisteittäin rajoitettu.*
(2) $\mathcal{Y}$ *on yhtäjatkuva.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{Y}$ pisteittäin rajoitettu. Olkoon $A \in \mathcal{U}_F$. Riittää osoittaa, että

$$\bigcap_{T \in \mathcal{Y}} T^{-1}(A) \in \mathcal{U}_E. \qquad (*)$$

Lauseen 2.8 mukaan avaruudella F on tynnyreistä muodostuva ympäristökanta, joten voimme olettaa, että A on tynnyri. Silloin tutkittava joukko $\bigcap_{T \in \mathcal{Y}} T^{-1}(A)$ on sekin tynnyri, sillä se on tietenkin balansoitu, suljettu ja konveksi, mutta lisäksi myös absorboiva, koska oletamme, että perhe $\mathcal{Y}$ on pisteittäin rajoitettu. Tynnyrilause 4.13 takaa, että väite $(*)$ on tosi.

Toisensuuntainen implikaatio on ilmeinen (harjoitustehtävä 0.0.42). □

Sovelluksena Banachin ja Steinhausin lauseesta saadaan kriteeri bilineaarikuvauksen jatkuvuudelle:

[33] Władysław Hugo Dionizy Steinhaus 1887–1972, Puola

Määritelmä 4.25. Olkoot E, F ja G vektoriavaruuksia. Kuvaus $\beta : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*[34], mikäli kaikki osittaiskuvaukset

$$\begin{aligned} \beta(\cdot, y) &: E \to \mathbb{K} : x \mapsto \beta(x,y) \quad \text{ja} \\ \beta(x, \cdot) &: F \to \mathbb{K} : y \mapsto \beta(x,y) \end{aligned}$$

ovat lineaarisia. Bilineaarikuvaus on *osittain jatkuva*, mikäli E, F ja G ovat topologisia vektoriavaruuksia ja osittaiskuvaukset ovat jatkuvia.

Jatkuva bilineaarikuvaus on tietenkin myös osittain jatkuva, mutta toisensuuntainen implikaatio ei päde aina. Usein silti päteekin:

Seuraus 4.26. *Olkoon $\beta : E \times F \to G$ osittain jatkuva bilineaarikuvaus. Jos E on Fréchet'n avaruus, F metrisoituva ja G lokaalikonveksi, niin β on jatkuva $E \times F \to G$.*

Todistus. Koska lähtöpuolen avaruus $E \times F$ on metrisoituva, riittää todistaa, että β on jonojatkuva. Tarkastellaan suppenevaa jonoa $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (x,y) \in E \times F$ eli jonoja $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Osittaiskuvausten perhe $\{x \mapsto \beta(x, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on pisteittäin rajoitettu, sillä kiinteällä $x \in E$ on $\{(x, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ suppeneva jono, siis rajoitettu, joten β:n osittaisen jatkuvuuden perusteella myös $\{\beta(x, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.

Koska osittaiskuvaukset ovat jatkuvia, niiden perhe on pisteittäin rajoitettu Fréchet'n avaruudessa E, ja F on lokaalikonveksi, niin perhe on Banachin ja Steinhausin lauseen mukaan yhtäjatkuva, joten kaikilla $U \in \mathcal{U}_G$ on olemassa sellainen $V \in \mathcal{U}_E$, että peräti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $\beta(V, y_n) \subset U$. □

Huomautus 4.27. Jos edellä E ei ole metrisoituva, niin joka tapauksessa todistus antaa tiedon, että β on jonojatkuva.

4.5. Metrisoitumattomat täydelliset topologiset vektoriavaruudet.

Yleisen topologisen vektoriavaruuden täydellisyys on syytä määritellä uudelleen, koska jonoihin perustuva määritelmä on riittämätön metrisoitumattomassa avaruudessa. Läheskään kaikki metrisistä avaruuksista tutut ja tärkeiksi sanotut lauseet eivät nimittäin yleisty koskemaan metrisoitumattomien avaruuksien Cauchy-jonoja.

Toisaalta monet jatkossa tarvitsemistamme avaruuksista ovat metrisoituvia tai rakentuvat metrisoituvista avaruuksista tavalla, joka tekee yksinkertaisemman teorian käyttökelpoiseksi. Perehdymme siis seuraavassa täydellisyyteen ainakin jossain määrin vain "täydellisyyden vuoksi".

Ideana on korvata suppenevat jonot suppenevilla filttereillä.

Määritelmä 4.28. Edellä sanottu antaa aiheen määritellä Cauchy-filtterin käsitteen ja vastaavan täydellisyyskäsitteen:

(1) Topologisen vektoriavaruuden osajoukon $A \subset E$ filtteri (tai filtterikanta) $\mathcal{F}$ on *Cauchy-filtteri(kanta)*, mikäli kaikilla origon ympäristöillä $U \in \mathcal{U}_0$ on olemassa $M \in \mathcal{F}$ siten, että $M - M \subset U$. [35]

[34] Yleensä bilineaarikuvauksia sanotaan "tuloiksi".

[35] Usein $A = E$.

(2) Topologisen vektoriavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *täydellinen*, mikäli sen jokainen Cauchy-filtteri (tai filtterikanta) $\mathcal{F}$ suppenee kohti jotain joukon A pistettä.[36]

Huomautus 4.29. Cauchy-filttereillä on pitkälti samat perusominaisuudet kuin Cauchy-jonoilla:

i) Topologisen vektoriavaruuden jono on Cauchy-jono tasan silloin, kun vastaava alkeisfiltteri on Cauchy-filtteri.
ii) Ympäristöfiltteri on Cauchy-filtteri.
iii) Jos $\mathcal{F}$ sisältää Cauchy-filtterin, niin $\mathcal{F}$ on itsekin Cauchy-filtteri. Erityisesti jokainen suppeneva filtteri on siis Cauchy-filtteri.
iv) Hausdorff-topologisen vektoriavaruuden jokainen täydellinen joukko on suljettu.
v) Täydellisen avaruuden jokainen suljettu osajoukko on täydellinen.
vi) Jatkuvassa lineaarikuvauksessa Cauchy-filtterin kuva on Cauchy-filtteri.
vii) Avaruuden E Cauchy-filtterin $\mathcal{F}$ *jälki* osajoukossa $A \subset E$ eli joukkoperhe $\mathcal{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$ on joko Cauchy-filtteri tai $\mathcal{F}_A \ni \emptyset$.

Todistus. Kolme ensimmäistä väitettä ja kaksi viimeistä ovat aika ilmeisiä. Todistetaan väitteet iv) ja v). Muistetaan, että huomautuksen 1.25 mukaan piste x kuuluu osajoukon A sulkeumaan tasan silloin, kun on olemassa joukon A osajoukoista muodostuva filtterikanta, joka suppenee kohti pistettä x. iv) Hausdorff-avaruudessa suppenevan filtterin raja-arvo on huomautuksen 1.26 mukaan yksikäsitteinen. Olkoon $A \subset E$ täydellinen ja $x \in \bar{A}$. Olkoon $\mathcal{B} = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}_x\}$. Oletuksen mukaan mikään joukkoperheen $\mathcal{B}$ alkioista ei ole tyhjä joukko, joten selvästikin $\mathcal{B}$ on filtteri joukossa A, vieläpä Cauchy-filtteri: kaikilla origon ympäristöillä $U' \in \mathcal{U}_0$ on olemassa $M = U \cap A \in \mathcal{B}$ siten, että $M - M = (U \cap A) - (U \cap A) \subset U - U \subset U'$. Koska A on täydellinen, niin $\mathcal{B}$ suppenee kohti jotain joukon A pistettä y. Avaruuden E filtterikantana siis $\mathcal{B} \to x$ ja $\mathcal{B} \to y$, joten Hausdorff-ehdon nojalla $x = y$ ja väite on todistettu.

v) Oletetaan nyt, että E on täydellinen ja $A \subset E$ suljettu sekä $\mathcal{B}$ joukon A Cauchy-filtteri. Silloin $\mathcal{B}$ on avaruuden E Cauchy-filtterikanta, joka siis suppenee kohti jotain $x \in E$. Tietenkin $x \in \bar{A} = A$. □

Todistamme seuraavassa, että metrisoituvassa lokaalikonveksissa avaruudessa täydellisyys ja jonotäydellisyys ovat sama asia.

Lause 4.30. *Metrisoituva lokaalikonveksi avaruus E on täydellinen topologisena vektoriavaruutena eli filtterien mielessä tasan ollessaan jonotäydellinen.*

Todistus. Täydellisyydestä seuraa edellisen lauseen kohdan (i) nojalla jonotäydellisyys, sillä topologisessa vektoriavaruudessa jonon suppeneminen merkitsee vastaavan alkeisfiltterin suppenemista [1.23].

Oletetaan seuraavaksi, että avaruudella $(E, \mathcal{P})$ on numeroituva origon ympäristökanta $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ ja että E:n jokainen Cauchy-jono suppenee. Olkoon $\mathcal{F}$ Cauchy-filtteri. Osoitetaan, että $\mathcal{F}$ suppenee.

[36] Palautetaan mieleen: Filtterille $\mathcal{F} \to x \iff \mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, filtterikannalle $\mathcal{F} \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}_x \, \exists A \subset \mathcal{F},\ A \subset U$.

Oletuksen mukaan on kaikilla $k \in \mathbb{N}$ olemassa $M_k \in \mathcal{F}$ siten, että $M_k - M_k \subset U_k$. Muodostetaan jono valitsemalla $x_n \in M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$. Näin saadaan Cauchy-jono, sillä $m, m' \geq n \implies x_m - x_{m'} \in M_n - M_n \subset U_n$. Jonotäydellisyys takaa, että on olemassa raja-arvo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Osoitetaan, että $\mathcal{F} \to x$ eli $x + \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{F}$. Tämä tarkoittaa, että jokainen pisteen x kantaympäristö $x + U_n$ kuuluu filtteriin $\mathcal{F}$. Tälle riittää, että jokaisella n on olemassa filtteriin $\mathcal{F}$ kuuluva joukko M_n', jolla $M_n' \subset x + U_n$ eli $M_n' - x \subset U_n$. Voisi luulla, että M_n':ksi kelpaa edellä valittu M_n, mutta näin ei ihan ole, sillä ei ole selvää, että $x \in M_n$, vaan tiedetään vain, että $x_n \in M_n$.

On aihetta käyttää tietoa $x_n \to x$, jonka mukaan erityisesti kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on olemassa n_k siten, että $x_{n_k} \in x + U_k$ eli $x \in x_{n_k} - U_k$. Tämän valossa kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja joukoilla M pätee

$$M - x \subset (M - x_{n_k}) + U_k,$$

joten tehtäväksi jää valita annetulla n luku k ja siihen liittyvä $x_{n_k} \in x + U_k$ sekä $M_n' \in \mathcal{F}$ siten, että

$$(M_n' - x_{n_k}) + U_k \subset U_n.$$

Tämä onnistuukin: topologisessa vektoriavaruudessa E voidaan valita $U_k \in \mathcal{U}_0$ siten, että

$$U_k + U_k \subset U_n.$$

Nyt riittää huolehtia siitä, että $(M_n' - x_{n_k}) \subset U_k$. Jonon $(x_n)_{\mathbb{N}}$ valinnan mukaan $x_p \in M_k$, kunhan $p \geq k$. Luku n_k voidaan tietenkin valita suuremmaksi kuin k, jolloin $x_{n_k} \in M_k$. Muistaen, että $M_k - M_k \subset U_k$ saamme aiheen valita $M_n' = M_k$, jolloin

$$(M_n' - x_{n_k}) + U_k = (M_k - x_{n_k}) + U_k \subset (M_k - M_k) + U_k \subset U_k + U_k \subset U_n.$$

□

5. Avaruuksien konstruoimista toisistaan

5.1. **Johdanto.**

Annetuista topologisista vektoriavaruuksista voi muodostaa uusia menettelytavoilla, jotka ovat tuttuja muistakin kategorioista[37]. Esimerkkejä näin muodostetuista topologisista vektoriavaruuksista ovat:

a) aliavaruus,
b) tekijäavaruus,
c) tuloavaruus,
d) suora summa,
e) täydentymä,
f) alkukuvatopologia eli projektiivinen limes,
g) lokaalikonveksi kuvatopologia eli lokaalikonveksi induktiivinen limes,
h) tarkka induktiivinen limes
i) lineaarikuvausten avaruus, erityisesti duaali

[37] Katergoriateorian kategoriat ovat eri asia kuin Baire'in kategoriat.

Kokoamme seuraavaan näiden konstruointitapojen määritelmät ja joukon perusominaisuuksia.

5.2. **Aliavaruus.**

Määritelmä 5.1. *Topologisen vektoriavaruuden E aliavaruus* on sen lineaarinen aliavaruus M varustettuna E:n indusoimalla aliavaruustopologialla.

Lause 5.2. *Topologisen vektoriavaruuden E aliavaruudella $M \subset E$ on seuraavat ominaisuudet:*

(i) *M on topologinen vektoriavaruus.*
(ii) *M perii E:ltä seuraavat ominaisuudet*
  (a) *Hausdorff*
  (b) *metrisoituva*
  (c) *lokaalikonveksi (alkuperäisten seminormien rajoittumat antavat topologian, jatkuvat seminormit ovat tasan alkuperäisten jatkuvien seminormien rajoittumat.)*
  (d) *normiavaruus.*
(iii) *Jos E on täydellinen ja M on suljettu, niin M on täydellinen.*
(iv) *Jos E on lokaalikonveksi, niin jokainen M:n jatkuva lineaarimuoto on jonkin E:n jatkuvan lineaarimuodon rajoittuma.*[38]
(v) *Aito aliavaruus on sisäpisteetön, mutta voi olla tiheä.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.52. Kohta (ii c) on seuraus 2.12. Kohta (iii) on 4.29 v). Kohta (iv) on Hahnin ja Banachin lause 3.5. □

5.3. **Tekijäavaruus.**

Määritelmä 5.3. *Topologisen vektoriavaruuden E tekijäavaruus* aliavaruuden $H \subset E$ suhteen on lineaarialgebrallinen tekijäavaruus E/H varustettuna *tekijäavaruustopologialla* τ, jonka määrittelevät seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

(i) τ on hienoin topologia, jossa kanoninen surjektio $\phi : E \to E/H$ on jatkuva.
(ii) τ on E:n *topologian kuva* kanonisessa surjektiossa $\phi : E \to E/H$, ts. $A \subset E/H$ avoin $\iff$ $\phi^{-1}(A) \subset E$ avoin.
(iii) τ on vektoriavaruustopologia, jossa origon ympäristökantana ovat E:n ympäristökantajoukkojen kuvat kanonisessa surjektiossa $\phi : E \to E/H$, ts.

$$\mathcal{K}_{E/H} = \{\phi(U) \mid U \in \mathcal{K}_E\}.$$

Lause 5.4. *Topologisen vektoriavaruuden E tekijäavaruudella E/H on seuraavat ominaisuudet*

(i) *E/H on topologinen vektoriavaruus.*
(ii) *Kanoninen surjektio $\phi : E \to E/H$ on jatkuva ja avoin kuvaus.*
(iii) *E/H on Hausdorff aina ja vain, kun $H \subset E$ on suljettu.*
(iv) *Jos H on suljettu, niin E/H perii E:ltä seuraavat ominaisuudet:*
  (a) *metrisoituva*

[38] Vastaava ei päde lineaarikuvauksille ääretönulotteisten avaruuksien välillä eikä lineaarimuodoillekaan yleisessä topologisessa vektoriavaruudessa.

(b) *lokaalikonveksi*
(c) *Fréchet. (Pelkkä täydellisyys ei periydy.)*

Todistus. Kohta (iv) todistetaan nyt, muut ovat harjoitustehtävä 0.0.53.

(a) on itsestään selvä.

(b) Lokaalikonveksin topologisen vektoriavaruuden E tekijäavaruudelle E/H saadaan topologian määrittelevä seminormiperhe seuraavalla konstruktiolla:

(1) Valitaan E:n topologian määräävä seminormiperhe $\mathcal{P}$, joka *suodattaa ylöspäin*, ts. kaikilla $p, q \in \mathcal{P}$ on olemassa $r \in \mathcal{P}$ siten, että $r \geq \max\{p, q\}$. (Tällainen perhe on aina olemassa, esimerkiksi kaikkien jatkuvien seminormien perhe kelpaa.)
(2) Määritellään kutakin $p \in \mathcal{P}$ kohti seminormi avaruuteen E/H asettamalla

$$\hat{p}(x + H) = \inf_{y \in x+H} p(y).$$

Näin todella saadaan seminormi.
(3) Huomataan, että näin syntyy ylöspäin suodattava seminormiperhe, joten yksittäisten seminormien semipallot muodostavat origon ympäristökannan seminormien $\hat{p}$ avaruuteen E/H määräämään lokaalikonveksiin topologiaan.
(4) Osoitetaan edellisen kohdan avulla, että näin saadaan juuri tekijäavaruustopologia.
(5) Loppu on ilmeistä.

(c) Tekijäavaruus on metrisoituva, joten riittää todeta sen jonotäydellisyys. Valitaan ympäristöfiltterille $\mathcal{U}_E$ numeroituva kanta $(U_n)_\mathbb{N}$, jolla

$$U_1 \supset 2U_2 \supset 4U_3 \supset \cdots \supset 2^{n-1}U_n \supset \ldots$$

Tekijäavaruudelle saadaan origon ympäristökanta $(\phi(U_n))_\mathbb{N}$.

Olkoon $(\phi(x_n))_\mathbb{N}$ Cauchy-jono tekijäavaruudessa E/H. On olemassa sen osajono $(\phi(x_{n(r)}))_{r\in\mathbb{N}}$ siten, että kaikilla $r \in \mathbb{N}$:

$$\phi(x_{n(r+j)}) - \phi(x_{n(r)}) \in \phi(U_r).$$

Tämä tarkoittaa, että on olemassa $u_r \in U_r$ siten, että

$$(x_{n(r+j)} - x_{n(r)}) - u_r = h_r \in H, \text{ eli}$$
$$x_{n(r+j)} - (x_{n(r)} + h_r) = u_r \in U_r.$$

Luokkien $\phi(x_{n(r)})$ edustajat voi siis valita siten, että

$$x_{n(r+j)} - x_{n(r)} \in U_r.$$

Näin $(x_{n(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono täydellisessä avaruudessa E, joten on olemassa raja-arvo $x = \lim_{r\to\infty} x_{n(r)}$. Koska kanoninen surjektio ϕ on jatkuva, niin $\phi(x) = \lim_{r\to\infty} \phi(x_{n(r)})$. Alkuperäisellä Cauchy-jonolla on siis suppeneva osajono, joten sekin suppenee. □

Seuraus 5.5. *Jos $T : E \to F$ on Fréchet'n avaruuksien välinen jatkuva lineaarikuvaus, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) *$T(E)$ on suljettu aliavaruus.*
b) *$T(E)$ on lineaarisesti homeomorfinen tekijäavaruuden $E/\operatorname{Ker} T$ kanssa.*

Todistus. Koska T on lineaarikuvaus, niin $\tilde{T} : E/\operatorname{Ker} T \to T(E) : \phi(x) \mapsto T(x)$ on lineaarinen isomorfismi. Se on sitäpaitsi selvästi jatkuvakin. Koska T on jatkuva, on sen ydin $\operatorname{Ker} T$ suljettu, joten edellisen lauseen nojalla tekijäavaruus $E/\operatorname{Ker} T$ on Fréchet'n avaruus. Jos $T(E) \subset F$ on suljettu, siis Fréchet'n avaruus, niin avoimen kuvauksen lauseen 4.17 perusteella $\tilde{T} : E/\operatorname{Ker} T \to T(E) : \phi(x) \mapsto T(x)$ on homeomorfismi.

Jos taas oletetaan, että $\tilde{T} : E/\operatorname{Ker} T \to T(E) : \phi(x) \mapsto T(x)$ on homeomorfismi, niin $T(E)$ on täydellinen, siis suljettu. □

Huomautus 5.6. Jos p on seminormi vektoriavaruudessa E, niin $\hat{p}$ on normi tekijäavaruudessa $E/\operatorname{Ker} p$.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.54. □

5.4. **Tuloavaruus.**

Määritelmä 5.7. Yleistetään kahden topologisen vektoriavaruuden tulon käsite äärettömän monen avaruuden tuloavaruudeksi.

Topologisten avaruuksien tulossa $\prod_{i\in I} X_i$ määritellään tunnetusti *tulotopologia* asettamalla avoimiksi kantajoukoiksi joukot $\prod_{i\in I} U_i$, missä jokainen $U_i \subset X_i$ on avoin ja kaikilla paitsi äärellisen monella indeksillä on $U_i = E_i$. Muut avoimet joukot ovat näiden kantajoukkojen yhdisteitä. Tulotopologia on siis karkein topologia, jossa *projektiot* $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j : (x_i)_I \mapsto x_j$ ovat jatkuvia.

Esimerkki 5.8. Tärkeimmät esimerkit tuloavaruudesta ovat topologisen vektoriavaruuden E *potenssit* eli avaruudet $E^X = \{f \mid f \text{ on kuvaus } X \to E\}$. Näistä konkreettisin esimerkki on *suorien tulo* $\mathbb{K}^X = \{f \mid f \text{ on kuvaus } X \to \mathbb{K}\}$, josta erikoistapauksena on jo kohdassa 4.6 mainittu Banachin jonoavaruus $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Huomautus 5.9. Tuloavaruus perii avaruuksilta E_i lokaalikonveksiuden, Hausdorff-ehdon ja täydellisyyden. sekä lisäksi metrisoituvuuden, jos tekijöitä on numeroituvan monta.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.55. □

Lause 5.10. *Jokainen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus E on (lineaarisesti ja homeomorfisesti) isomorfinen jonkin Banach-avaruuksien tuloavaruuden aliavaruuden kanssa.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ perhe seminormeja, joka määrää lokaalikonveksin avaruuden E topologian $\mathcal{T}$. Jokainen ydin $\operatorname{Ker} p_i = \{x \in E \mid p_i(x) = 0\}$ on suljettu aliavaruus ja $E_i = E/\operatorname{Ker} p_i$ on siis huomautuksen 5.6 mukaan normiavaruus, normina $\|\phi_i(x)\| = p_i(x)$. Normiavaruudella E_i on tunnetusti täydentymä $\widetilde{E}_i$, joka on Banach-avaruus. Osoitetaan, että

$$f : E \mapsto \prod_{i\in I} \widetilde{E}_i : x \mapsto \big(\phi_i(x)\big)_{i\in I}$$

on lineaarinen homeomorfismi kuvajoukolleen.

Lineaarisuus on ilmeinen asia. Injektiivisyys seuraa siitä, että E oletettiin Hausdorff-avaruudeksi, jolloin $p_i(x) = 0$ kaikilla $i \in I$ ainoastaan, kun $x = 0$. Lopuksi f on homeomorfismi, sillä kuvajoukon $f(E)$ topologia on tuloavaruuden topologia, joka saadaan seminormeista $p'_j\big((\phi_i(x))_{i\in I}\big) = \|\phi_j(x)\| = p_j(x)$, siis samoista kuin alkukuvapuolella. $\square$

5.5. Suora summa.

Määritelmä 5.11. Topologisten vektoriavaruuksien E_i, $i \in I$ *ulkoinen suora summa* on topologinen vektorialiavaruus

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \Big\{(x_i)_I \in \prod_{i\in I} E_i \;\Big|\; x_i \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } i\Big\}.$$

Tulotopologiasta periytyvää topologiaa sanotaan *heikoksi topologiaksi* ja suoraa summaa sillä varustettuna sanotaan usein *heikoksi suoraksi summaksi*.

Ulkoisessa suorassa summassa on yleisesti käytössä toinenkin topologia, jota — hieman harhaanjohtavasti — nimitetään sen "lokaalikonveksiksi topologiaksi". Ks. 5.24.

Määritelmä 5.12. Topologisen vektoriavaruuden E vektorialivaruuksien E_i, $i \in I$ *sisäinen suora summa* on niiden lineaarialgebrallinen suora summa varustettuna avaruuden E antamalla aliavaruustopologialla.

Huomautus 5.13. Aliavaruuksien sisäinen suora summa on lineaarialgebrallisesti, mutta yleensä ei topologisesti isomorfinen niiden ulkoisen suoran summan kanssa. Jos se kuitenkin on isomorfinen, niin sitä sanotaan toisinaan *topologiseksi suoraksi summaksi*. Kahden aliavaruuden sisäistä suoraa summaa käsitellään harjoitustehtävässä 0.0.39.

5.6. Täydentymä.

Huomautus 5.14. Täydellisyydestä on jo puhuttu mm. luvussa 4.2 ja normiavaruuden täydentymä mainittiin juuri edellä. Huomattakoon tässä, että topologisten vektoriavauuksien E_i tuloavaruus ja heikko ulkoinen suora summa ovat täydellisiä aina ja vain, kun kaikki avaruudet E_i ovat täydellisiä. Sen sijaan täydellisenkään avaruuden tekijäavaruus ei yleensä ole täydellinen, paitsi Fréchet'n avaruuden tekijäavaruus suljetun aliavaruuden suhteen. Ks. 5.4.

Lause 5.15. (Täydentymän olemassaolo ja yksikäsitteisyys) *Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja Hausdorff. Silloin on olemassa avaruuden E* täydentymä, *eli täydellinen Hausdorff topologinen vektoriavaruus $\widehat{E}$, jonka jokin tiheä aliavaruus E_1 on isomorfinen E:n kanssa. Kaikki avaruuden E täydentymät ovat isomorfisia keskenään, joten "täydentymä on yksikäsitteinen".*

Perustelu. Yleinen todistus on hankala ja sivuutetaan.[39] Lokaalikonveksissa tapauksessa täydentymän olemassaolo saadaan tyylikkäästi lauseesta 5.10, jonka mukaan E on isomorfinen erään täydellisten avaruuksien tuloavaruuden — siis täydellisen avaruuden — aliavaruuden kanssa, joten täydentymäksi kelpaa sen sulkeuma. Täydentymän yksikäsitteisyys taas todistetaan aika helposti lineaarikuvauksen sulkeumaan jatkamista koskevan lauseen 4.11 avulla. Yksityiskohdat ovat harjoitustehtävä 0.0.57.

[39] Ks. esim. [2] §5.

Huomautus 5.16. (Grothendieckin täydentymälause)[40] Lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden E täydentymä voidaan vektoriavaruutena samaistaa seuraavan avaruuden kanssa: (Heikon topologian $\sigma(E^*, E)$ määritelmä on kohdassa 7.9 ja polaaritopologian kohdassa 7.36. Ks. myös 7.40.)

$$\{f \in (E^*)' \mid f\text{:n rajoittuma jokaiseen yhtäjatkuvaan joukkoon on } \sigma(E^*, E)\text{−jatkuva}\}.$$

Täydentymän topologia voidaan samaistaa perheen $\mathfrak{S} = \{A \subset E^* \mid A \text{ on yhtäjatkuva}\}$ polaaritopologiaan.

Todistus. Todistus ei ole kovin hankala, mutta sivuutetaan kuitenkin. Ks. esim. [4].

5.7. **Alkukuvatopologia eli projektiivinen limes.**

Määritelmä 5.17. Olkoon X joukko ja $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ perhe kuvauksia X:ltä topologisille avaruuksille (X_i, τ_i). Kuvausten f_i $(i \in I)$ virittämä *alkukuvatopologia* eli *projektiivinen topologia* on karkein joukon X topologia, jossa jokainen f_i on jatkuva. Sen alikantana ovat avointen joukkojen alkukuvat $f^{-1}(U_i)$. Muut avoimet joukot ovat siis näiden äärelliset leikkaukset ja niiden kaikki yhdisteet.

Huomautus 5.18. Alkukuvatopologialla on seuraavat perusominaisuudet

(i) Jos E on vektoriavaruus ja jokainen f_i on lineaarikuvaus topologiseen vektoriavaruuteen F_i, niin alkukuvatopologia tekee E:stä topologisen vektoriavaruuden.
(ii) Jos lisäksi jokainen F_i on lokaalikonveksi, niin alkukuvatopologiakin on lokaalikonveksi seminormein $p_{ij} \circ f_i$, missä $(p_{ij})_j$ määrää avaruuden F_i topologian.

Varoitus. Yksittäisessä lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{P})$ on kyllä karkein lokaalikonveksi topologia, jossa jokainen seminormi $p \in \mathcal{P}$ on jatkuva, mutta tämä ei yleensä ole perheen $\mathcal{P}$ alkukuvatopologia. Vastaesimerkin tarjoaa jo $\mathbb{R}$:n itseisarvonormi, jonka alkukuvatopologiassa väli $]0, 1[$ ei ole avoin, koska tässä alkukuvatopologiassa jokainen avoin joukko on symmetrinen 0:n suhteen.

Lause 5.19. (Projektiivisuuslause) *Olkoon E vektoriavaruus, jossa on joidenkin lineaarikuvausten $f_i : E \to F_i$ (F_i topologinen vektoriavaruus) määräämä alkukuvatopologia. Silloin lineaarikuvaus T mistä tahansa topologisesta vektoriavaruudesta avaruuteen E on jatkuva aina ja vain, kun jokainen $f_i \circ T$ on jatkuva.*

Todistus. Väite seuraa suoraan määritelmistä! □

Esimerkki 5.20. Seuraavat ovat esimerkkejä alkukuvatopologiasta:

(i) Tulotopologia määriteltiin projektioiden määräämänä alkukuvatopologiana.
(ii) Aliavaruustopologia määriteltiin inkluusiokuvauksen määräämänä alkukuvatopologiana.
(iii) Heikko topologia $\sigma(E, E^*)$ (Ks. 7.9) on kaikkien lineaarikuvausten $x^* \in E^*$ määräämä alkukuvatopologia.

[40] Alexander Grothendieck 1925 - ?(kadonnut). Ranska. Lause on vuodelta 1950.

Huomautus 5.21. Edellisen esimerkin kohta (ii) osoittaa, että avaruuksien E_i täydellisyys ei periydy niistä muodostettuun alkukuvatopologiaan, eihän täydellisen avaruuden aliavaruus yleensä ole täydellinen.

5.8. **Lokaalikonveksi kuvatopologia eli lokaalikonveksi induktiivinen limes.**

Määritelmä 5.22. Olkoon E vektoriavaruus ja $\{T_i : F_i \to E \mid i \in I\}$ perhe lineaarikuvauksia joiltakin lokaalikonvekseilta avaruuksilta vektoriavaruudelle E. Kuvausten T_i ($i \in I$) virittämä *lokaalikonveksi kuvatopologia* eli *lokaalikonveksi induktiivinen (limes)topologia* on hienoin E.n lokaalikonveksi topologia, jossa jokainen T_i on jatkuva. Sen origon ympäristökannaksi kelpaa

$$\mathcal{B}_E = \{U \subset E \mid U \text{ on balansoitu, konveksi, ja absorboiva ja } T_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{E_i} \, \forall\, i \in I\}.$$

Varoitus. Yleensä induktiivinen lokaalikonveksi topologia eroaa avaruuden E *maalitopologiasta*, joka on ”induktiivinen objekti topologisten avaruuksien kategoriassa” eli hienoin topologia, jossa kuvaukset T_i ovat kaikki jatkuvia. Vika on siinä, että maalitopologia ei yleensä ole lokaalikonveksi vektoriavaruustopologia (harjoitustehtävä 0.0.58).

Lause 5.23. (Induktiivisuuslause) *Olkoon E vektoriavaruus, jossa on lineaarikuvausten $f_i : F_i \to E$ (F_i lokaalikonveksi vektoriavaruus) määräämä lokaalikonveksi kuvatopologia.*

(i) *Lineaarikuvaus T avaruudesta E mihin tahansa lokaalikonveksiin vektoriavaruuteen F on jatkuva aina ja vain, kun jokainen $T \circ T_i$ on jatkuva. Erityisesti tämä koskee lineaarimuotoja $E \to \mathbb{K}$.*

(ii) *Avaruuden E seminormi p on jatkuva aina ja vain, kun jokainen $p \circ T_i$ on jatkuva (seminormi).*

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan määritelmistä. Kannattaa todistaa ensin seminormeja koskeva väite (ii). □

Esimerkki 5.24. Esimerkkejä lokaalikonveksista kuvatopologiasta.

(i) Tekijäavaruuden topologia on lokaalikonveksi kuvatopologia, missä ainoana kuvauksena T_i on kanoninen surjektio.

(ii) Muistetaan määritelmä 5.11, jonka mukaan topologisten vektoriavaruuksien $E_i,\ i \in I$ ulkoinen suora summa on

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \Big\{(x_i)_I \in \prod_{i\in I} E_i \;\Big|\; x_i \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } i\Big\}.$$

Jos avaruudet E_i, $i \in I$ ovat lokaalikonvekseja, niin niiden ulkoinen suora summa voidaan varustaa induktiivisella lokaalikonveksilla topologialla inkluusiokuvausten

$$f_j : E_j \to \bigoplus_{i\in I} E_i : x_j \mapsto (x_i)_I : \begin{cases} x_i = x_j, \text{jos } i = j \\ x_i = 0 \text{ muuten} \end{cases}$$

suhteen. Näin syntyy ns. *lokaalikonveksi suora summa.*

Lokaalikonveksilla suoralla summalla on eri topologia kuin kohdassa 5.11 määritellyllä heikolla ulkoisella suoralla summalla. Molemmat indusoivat tosin alkuperäisiin avaruuksiin niiden alkuperäisen topologian, mutta äärettömän monen avaruuden suorassa summassa lokaalikonveksi induktiivinen limestopologia on itse asiassa aidosti hienompi kuin heikko topologia (harjoitustehtävä 0.0.59).

Lause 5.25. *Lokaalikonveksi induktiivinen topologia perii alkuperäisiltä avaruuksilta mm. seuraavat ominaisuudet:*

(i) *Tynnyriavaruuksien F_i lokaalikonveksi induktiivinen limes E on tynnyriavaruus.*

(ii) *"Bornologisten avaruuksien" F_i lokaalikonveksi induktiivinen limes E on "bornologinen avaruus".*

Todistus. Väitteet seuraavat lähes suoraan määritelmistä 4.14 ja 6.11. □

5.9. **Tarkka induktiivinen limes.**

Määritelmä 5.26. Olkoot $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \ldots$ toistensa suljettuja lokaalikonvekseja Hausdorff-alivaruuksia. Yhdistettä $E = \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$ varustettuna inkluusiokuvausten $i_n : E_i \to E$ määräämällä induktiivisella topologialla sanotaan avaruuksien E_n *tarkaksi induktiiviseksi limekseksi* $\varinjlim E_n$.[41]

Esimerkki 5.27. Pääesimerkit tarkasta induktiivisesta limeksestä ovat Radon-mittojen testifunktioavaruus ja Schwartzin distribuutioiden testifunktioavaruus, joihin palataan perusteellisesti distribuutioita koskevassa osassa. Vasta siinä yhteydessä esitellään yleisen tarkan induktiiviseen limeksen ominaisuudet lauseena 9.16.

5.10. **Lineaarikuvausten avaruus.**

Määritelmä 5.28. Olkoot E ja F topologisia vektoriavaruuksia. Kaikkien lineaarikuvausten joukko $L(E,F) = \{T : E \to F \mid T \text{ on lineaarinen}\}$ on vektoriavaruus ja jatkuvien lineaarikuvausten joukko $\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F \mid T \text{ on lineaarinen}\}$ sen aliavaruus.

Huomautus 5.29. Kun E ja F ovat normiavaruuksia, $\mathcal{L}(E,F)$ on tapana varustaa operaattorinormin antamalla topologialla, joka tekee siitä normiavaruuden, joka lisäksi perii täydellisyyden avaruudelta F. Jatkuvien lineaarikuvausten eli operaattorien avaruudella on muitakin merkittäviä topologioita niin normiavaruuksien teoriassa kuin yleisimmillekin topologisille vektoriavaruuksille.

Yleensäkin matemaattisille struktuureille on ominaista, että annettujen objektien välisten morfismien joukoista pyritään muodostamaan uusia objekteja, joilla on samanlainen struktuuri kuin alkuperäisillä objekteilla. Tästä huolimatta emme juuri syvenny topologisten vektoriavaruuksien operaattoriteoriaan tässä kirjassa vaan tyydymme tärkeään erikoistapaukseen, jossa F on $\mathbb{K}$. Tätä tapausta, avaruuden E duaalia, käsitellään perusteellisesti luvussa 7.

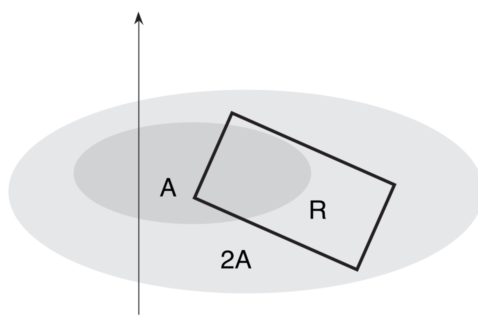
[41] Englanniksi direct limit.

6. Rajoitetuista joukoista ja lineaarikuvauksista

6.1. **Rajoitetut joukot.**

Rajoitetuista joukoista on jo ollut vähän puhetta kohdassa 4.21. Toistetaan tärkeä määritelmä:

Määritelmä 6.1. Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $R \subset E$. Sanomme, että R on *rajoitettu*, mikäli jokainen origon ympäristö *absorboi* sen: $\forall A \in \mathcal{U}_0 \, \exists \lambda > 0 : R \subset \lambda A$.



Kuva 9. Rajoitettu joukko tasossa

Lause 6.2. *Lokaalikonveksin avaruuden $(E, \mathcal{P})$ osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu, jos ja vain jos jokainen seminormi $p \in \mathcal{P}$ on rajoitettu funktio joukossa A eli jos jokainen reaalilukujoukko $p(A)$ on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon A rajoitettu ja $p \in \mathcal{P}$. Nyt semipallo B_p on origon ympäristö, joten on olemassa $\lambda > 0$ siten, että $R \subset \lambda B_p$, jolloin $p(A) \subset [-\lambda, \lambda]$.

Olkoon seuraavaksi jokainen p rajoitettu ja $U \in \mathcal{U}_0$. Valitaan luku $\varepsilon > 0$ ja seminormit $p_i \in \mathcal{P}$ (i=1,2,... n) siten, että $U \supset \varepsilon \bigcap_{i=1}^n U_{p_i}$. Koska jokainen p_i on rajoitettu A:ssa, on olemassa luvut $\lambda_i > 0$ siten, että $p_i(A) \subset [-\lambda_i, \lambda_i]$, jolloin $A \subset \bigcap_{i=1}^n \lambda_i U_{p_i} \subset \lambda \bigcap_{i=1}^n U_{p_i}$, missä $\lambda = \max_i \lambda_i$. Siis $A \subset \lambda \bigcap_{i=1}^n U_{p_i} \subset \frac{\lambda}{\varepsilon} U$. □

Esimerkki 6.3. Topologisessa vektoriavaruudessa seuraavat ovat rajoitettuja joukkoja:

a) jokainen täysrajoitetu joukko (Ks. 6.6), erityisesti kompakti joukko ja Cauchy-jonon pisteet
b) rajoitetun joukon osajoukko,
c) rajoitetun joukon sulkeuma,
d) rajoitetun joukon balansoitu verho,
e) rajoitetun joukon kuva jatkuvassa lineaarikuvauksessa,
f) rajoitettujen joukkojen äärellinen yhdiste,
g) rajoitettujen joukkojen äärellinen summa,
h) lokaalikonveksissa avaruudessa rajoitetun joukon konveksi verho,
i) normiavaruudessa tavalliset rajoitetut joukot.

Perustelu. Harjoitustehtävä 0.0.60. □

Varoitus. Muussa metrisoituvassa topologisessa vektoriavaruudessa kuin normiavaruudessa mikään metriikan pallo ei ole rajoitettu joukko määritelmän 6.1 mukaisessa topologisessa mielessä. Erityisesti ei ole olemassa ollenkaan rajoitettuja ympäristöjä. Myöskään metrisoitumattomissa lokaalikonvekseissa avaruuksissa ei ole rajoitettuja ympäristöjä. Sen sanoo seuraava lause:

Lause 6.4. (Kolmogorov v.1935)[42] *Lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, jossa on yksikin sisäpisteellinen rajoitettu joukko, on normiavaruus.*

Todistus. Olkoon E lokaalikonveksi. Topologian siirtoinvarianssin takia voi olettaa, että tutkittavan rajoitetun joukon U sisäpiste on origo, eli on olemassa rajoitettu $U \in \mathcal{U}_0$. On olemassa tynnyri $V \in \mathcal{U}_0$, jolla $U \supset V$, siis rajoitettu tynnyri $V \in \mathcal{U}_0$. Olkoon p sen mittausfunktio, joka on seminormi. Koska V on rajoitettu, kaikilla $W \in \mathcal{U}_0$ on $\lambda V \subset W$ jollain $\lambda > 0$. Siis p määrää jo yksinään avaruuden E topologian. Seminormiavaruus $(E, \{p\})$ on normiavaruus, koska se on oletuksen mukaan Hausdorff. □

Määritelmä 6.5. Topologisen vektoriavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *täysrajoitettu*[43], jos kaikilla ympäristöillä $U \in \mathcal{U}_0$ on olemassa äärellisen monta pistettä $x_1, \ldots, x_n$ siten, että

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U),$$

eli jos se voidaan peittää äärellisen monella annetun ympäristön kopiolla.

Jokainen täysrajoitettu joukko on rajoitettu.

Esimerkki 6.6. Seuraavat ovat täysrajoitettuja:

a) äärellinen joukko,
b) kompakti joukko,
c) Cauchy-jonon pisteet,
d) täysrajoitetun joukon balansoitu verho,
e) täysrajoitetun joukon sulkeuma,
f) täysrajoitetun joukon osajoukko,
g) täysrajoitetun joukon kuva jatkuvassa lineaarikuvauksessa,
h) täysrajoitettujen joukkojen äärellinen yhdiste,
i) täysrajoitettujen joukkojen äärellinen summa,
j) lokaalikonveksissa avaruudessa täysrajoitetun joukon konveksi verho.

Perustelu. Viimeistä lukuun ottamatta nämäkin todistukset ovat helppoja harjoitustehtäviä (0.0.61). Konveksia verhoa koskeva väite todistetaan näin: Olkoon $A \subset E$ täysrajoitettu ja $U \in \mathcal{U}_0$. Koska E on lokaalikonveksi, on olemassa konveksi $V \in \mathcal{U}_0$, jolla $V + V \subset U$. Koska E on täysrajoitettu, on olemassa äärellinen joukko $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ siten, että $A \subset F + V$. Koska F on äärellinen, F ja siis myös $\operatorname{co} F$ sisältyy äärellisulotteiseen aliavaruuteen ja on siis kompakti, siis täysrajoitettu, joten on olemassa äärellinen joukko G siten, että $\operatorname{co} F \subset G + V$. Nyt

[42] Andrei Nikolajevitš Kolmogorov 1903 – 1987, Venäjä/Neuvostoliitto.
[43] Engl. totally bounded.

$\operatorname{co} A \subset \operatorname{co}(F+V) \subset \operatorname{co}(\operatorname{co} F+V)$. Huomautuksen 1.14 d) mukaan kahden konveksin joukon summajoukko $\operatorname{co} F+V$ on konveksi, joten $\operatorname{co}(\operatorname{co} F+V) = \operatorname{co} F+V$. Kokoamalla inkluusiot saadaan $A \subset \operatorname{co}(\operatorname{co} F+V) = \operatorname{co} F+V \subset G+V+V \subset G+U$. □

Huomautus 6.7. Ääretönulotteisen normiavaruuden suljettu pallo on tosin aina rajoitettu, mutta ei koskaan täysrajoitettu, erityisesti ei kompakti.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.62. □

Huomautus 6.8. Lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, jossa on olemassa täysrajoitettu sisäpisteellinen joukko, on Kolmogorovin lauseen 6.4 mukaan normiavaruus ja siis äskeisen lauseen mukaan suorastaan äärellisulotteinen ja edelleen lauseen 1.32 mukaan isomorfinen avaruuden $\mathbb{K}^n$ kanssa.

Vaikka lokaalikonveksissa Hausdorff-avaruudessa ei siis yleensä ole täysrjoitettuja ympäristöjä, niin avaruudella voi kuitenkin olla *Heinen ja Borelin ominaisuus*[44] sellaisessa mielessä, että avaruuden jokainen rajoitettu, suljettu joukko on kompakti. (Ks. määr. 9.17)

6.2. Rajoitetut lineaarikuvaukset ja bornologiset avaruudet.

Määritelmä 6.9. Topologisten vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus $L : E \to F$ on *rajoitettu*, jos se kuvaa kaikki rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.

Huomautus 6.10. Jatkuva lineaarikuvaus on huomautuksen 4.22 mukaan rajoitettu, mutta joissakin avaruuksissa on olemassa muitakin rajoitettuja lineaarikuvauksia. Vastaesimerkin keksimistä helpottaa seuraava käsite.

Määritelmä 6.11.

a) Joukkoa, joka absorboi kaikki rajoitetut joukot, sanotaan *bornivooriksi* joukoksi. Erityisesti siis jokainen origon ympäristö on bornivoori joukko.
b) Avaruus, jonka jokainen balansoitu, konveksi, bornivoori joukko on origon ympäristö, on *bornologinen* avaruus.

Lause 6.12. *Lokaalikonveksi avaruus E on bornologinen, jos ja vain jos jokaisella lokaalikonveksilla avaruudella F jokainen rajoitettu lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva.*

Todistus. Olkoon lokaalikonveksi avaruus E bornologinen. Olkoon $T : E \to F$ rajoitettu lineaarikuvaus, missä F on lokaalikonveksi. Olkoon $U \in \mathcal{U}_F$. Voidaan olettaa, että U on tynnyri. Nyt $T^{-1}(U)$ on balansoitu ja konveksi, joten riittää osoittaa, että se on bornivoori. Olkoon siis $A \subset E$ rajoitettu. Silloin $T(A)$ on oletuksen mukaan rajoitettu avaruudessa F, joten $T(A) \subset \lambda U$ jollain $\lambda > 0$. Selvästi $A \subset T^{-1}(\lambda U) = \lambda T^{-1}(U)$. Siis $T^{-1}(U)$ on origon ympäristö, joten T on jatkuva.

Käänteisen puolen todistamiseksi oletetaan, että jokainen rajoitettu lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva. Sovelletaan tätä identtiseen kuvaukseen $T : E \to E$, missä avaruus E on maalipuolella varustettu sellaisella lokaalikonveksilla topologialla τ, jossa origon ympäristökantana ovat kaikki avaruuden E rajoitetut, balansoidut,

[44]Heinrich Eduard Heine 1821–1881, Saksa ja F élix Édouard Justin Émile Borel 1871–1956, Ranska.

konveksit, bornivoorit joukot. Jokainen E:n alkuperäinen rajoitettu joukko on rajoitettu myös tässä topologiassa. Siis T on rajoitettu kuvaus, joten T on jatkuva, ja siis jokainen balansoitu, konveksi, bornivoori joukko on origon ympäristö alkuperäisessä topologiassa. □

Esimerkki 6.13. Jokainen metrisoituva lokaalikonveksi avaruus E, erityisesti jokainen normiavaruus on bornologinen.

Todistus. Tarkastellaan avaruuden E numeroituvaa ympäristökantaa $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Olkoon $A \subset E$ konveksi, balansoitu, bornivoori joukko, jolloin A absorboi kaikki rajoitetut joukot. Osoitetaan, että A on origon ympäristö. Riittää näyttää, että $nA \supset U_n$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Jos näin ei olekaan, niin $U_n \setminus nA \neq \emptyset$ kaikilla n, joten on olemassa jono pisteitä $x_n \in U_n \setminus nA$. Silloin $x_n \to 0$, joten $(x_n)_\mathbb{N}$ on rajoitettu ja siis A absorboi sen ja on siis olemassa $\lambda > 0$, jolla jokainen $x_n \in \lambda A$. Valitaan $m \in \mathbb{N}$ suuremmaksi kuin λ, jolloin jokainen $x_n \in mA$. Erityisesti $x_m \in mA$ vastoin jonon (x_n) konstruktiota. □.

Seuraus 6.14. *Lineaarikuvaus normiavaruudelta lokaalikonveksille avaruudelle on jatkuva aina ja vain, kun se kuvaa yksikköpallon rajoitetuksi joukoksi.*

Seuraus 6.15. *Rajoitettu lineaarikuvaus metrisoituvalta lokaalikonveksilta avaruudelta lokaalikonveksille avaruudelle on jatkuva.*

Huomautus 6.16. Tällä seurauksella on terästys. lause 9.23, jonka mukaan lineaarikuvaus metrisoituvalta lokaalikonveksilta avaruudelle lokaalikonveksille avaruudelle on jatkuva, kunhan se kuvaa kaikki origoa kohti suppenevat jonot rajoitetuiksi joukoiksi.

7. Dualiteetit

7.1. **Duaalit.**

Vektoriavaruuden E *(algebrallinen) duaaliavaruus* eli *duaali* on määritelmän 1.28 mukaan kaikkien lineaarimuotojen avaruus $E' = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on lineaarinen}\} \subset \mathbb{K}^E$. Kun $x \in E$ ja $x' \in E'$, niin merkitään usein $x'(x) = \langle x, x' \rangle$. Topologisen vektoriavaruuden E *topologinen duaaliavaruus* eli *topologinen duaali* — puhekielessä sekin usein pelkkä *duaali* — on kaikkien jatkuvien lineaarimuotojen avaruus $E^* = \{f \in E' \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Kun $x \in E$ ja $x^* \in E^*$, niin merkitään usein $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

Määritelmä 7.1. Duaalien E' ja $E^* \subset \mathbb{K}^E$ *heikko topologia* on niihin kaikkien funktioiden avaruuden $\mathbb{K}^E$ tulotopologiasta saatu aliavaruustopologia.

Avaruuden E' heikkoa topologiaa merkitään $\sigma(E', E)$, joskus lyhyesti σ tai w' ja avaruuden E^* heikkoa topologiaa $\sigma(E^*, E)$, joskus lyhyesti σ tai w^*. Merkinnät vaihtelevat kirjallisuudessa. ”Normiavaruuden E heikkoa topologiaa” $\sigma(E, E^*)$ merkitään usein s tai w, samoin erityisesti ”normiavaruuden E^* heikkoa topologiaa” $\sigma(E^*, E^{**})$. Seuraavassa esitämme, miten näitä käsitteitä voi yleistää ja samalla selkeyttää.

7.2. **Dualiteetti.**

Duaali ja heikko topologia olivat itse asiassa eräänä motivaationa lähteä ollenkaan tutkimaan muitakin topologisia vektoriavaruuksia kuin normiavaruuksia. Palaamme hetkeksi tälle lähteelle tutkaillen hieman mm. Alaoglun lauseen topologista versiota. Aloitamme laajentamalla duaalin ja heikon topologian käsitteen yleisempään asetelmaan.

Määritelmä 7.2. (a) Olkoot E ja F vektoriavaruuksia. Bilineaarikuvauksia

$$E \times F \to \mathbb{K}$$

sanotaan *bilineaarimuodoiksi* eli *dualiteeteiksi*. Bilineaarimuotoa merkitään usein $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$. Bilineaarisuus ilmaistaan toisinaan sanomalla, että $((E, F), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on *duaalipari*. Muistetaan määritelmästä 4.25, että bilineaarisuus merkitsee, että kaikki osittaiskuvaukset

$$\langle \cdot, y \rangle : E \to \mathbb{K} : x \mapsto \langle x, y \rangle \quad \text{ja}$$
$$\langle x, \cdot \rangle : F \to \mathbb{K} : y \mapsto \langle x, y \rangle$$

ovat lineaarisia eli $\langle \cdot, y \rangle \in E'$ ja $\langle x, \cdot \rangle \in F'$. Kun itse bilineaarimuodosta ei ole epäselvyyttä, puhutaan lyhyesti *dualiteetista* (E, F).

Esimerkki 7.3. Esimerkkejä duaalipareista on helppo keksiä — monet ovat tärkeitäkin.

a) Vektoriavaruuteen E ja sen algebralliseen duaaliin E' liittyy *kanoninen dualiteetti*
$$E \times E' \to \mathbb{K} : (x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle = x'(x).$$
b) Jos E on topologinen vektoriavaruus, vaikkapa normiavaruus, niin myös kanonisen dualiteetin rajoittumaa pariin (E, E^*) sanotaan *kanoniseksi dualiteetiksi*.
c) Sisätulot ovat dualiteetteja.
d) Mm. suhteellisuusteoriassa tärkeä ”Minkowskin sisätulo”on bilineaarimuoto (mutta ei sisätulo).
e) Nollamuotokin on bilineaarinen, siis triviaali dualiteetti.

Huomautus 7.4. Dualiteettiin liittyvät kuvaukset $E \to F' : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ ja $F \to E' : x \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ ovat tietenkin lineaarisia. Yleisessä tapauksessa kumpikaan ei ole välttämättä injektio eikä surjektio — vastaesimerkikisi käy nollamuoto.

Määritelmä 7.5. Dualiteetti (E, F) *separoi* eli *erottaa* avaruuden E (pisteet), mikäli kaikille $x \in E \setminus \{0\}$ on olemassa $y \in F$, siten, että $\langle x, y \rangle \neq 0$. Vastaavalla tavalla määritellään avaruuden F *separoiva* ja (molemmat) *separoiva* dualiteetti.

Huomautus 7.6. Dualiteetille (E, F) seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:

(1) (E, F) separoi avaruuden E,
(2) Jos $\langle x, y \rangle = 0$ kaikille $y \in F$, niin $x = 0$.
(3) $\operatorname{Ker}(E \to F' : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle) = \{0\}$.
(4) Kuvaus $E \to F' : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ on injektio, joten vektoriavaruutena voi tulkita $E \subset F'$. (Tässä ei topologiaa, vaan algebrallinen duaali!)

Vastaavat huomautukset koskevat avaruuden F separointia $F \subset E'$.[45]

Esimerkki 7.7. a) Algebrallinen kanoninen dualiteetti (E, E') separoi tietenkin avaruuden E' ja kanoninen dualiteetti (E, E^*) alivaruuden E^*.

b) Algebrallinen kanoninen dualiteetti (E, E') separoi myös avaruuden E, minkä voi helposti todeta käyttämällä Hamelin kantaa, ovathan Hamel- koordinaatit lineaarimuotoja.

c) Sen sijaan topologinen kanoninen dualiteetti (E, E^*) ei aina separoi avaruutta E, voihan topologisen vektoriavaruuden topologinen duaali E^* olla jopa pelkkä $\{0\}$. Seuraava lause 7.8 sanoo tosin, että lokaalikonveksin avaruuden topologinen kanoninen dualiteetti separoi myös E:n.

d) Sisätulot ovat separovia dualiteetteja.

e) Minkowskin sisätulo on sekin separoiva bilineaarimuoto.

f) Mm. analyyttisessa mekaniikassa esiintyvä ns. *symplektinen muoto* on separoiva, antisymmetrinen bilineaarimuoto.

g) Nollamuoto separoi tietenkin vain triviaalin avaruuden $\{0\}$.

Lause 7.8. *Lokaalikonveksilla Hausdorff-avaruudella, erityisesti normiavaruudella, kanoninen dualiteetti (E, E^*) separoi myös avaruuden E.*

Todistus. Väite seuraa Hahnin ja Banachin lauseen seurauksesta 3.8.

7.3. **Dualiteetin heikot topologiat.**

Määritelmä 7.9. Dualiteettiin (E, F) liittyvä *avaruuden E heikko topologia* $\sigma(E, F)$ on avaruuden E lokaalikonveksi topologia, jonka määrää seminormiperhe

$$\{p_y = |\langle \cdot, y\rangle| \bigm| y \in F\}.$$

Vastaavasti määritellään *avaruuden F heikko topologia* $\sigma(F, E)$ seminormiperheellä

$$\{p_x = |\langle x, \cdot\rangle| \bigm| x \in E\}.$$

Huomautus 7.10. Avaruuden E heikko topologia $\sigma(E, F)$ on Hausdorff tasan silloin, kun dualiteetti (E, F) separoi avaruuden E.

Perustelu. Harjoitustehtävä 0.0.64. □

Merkitsemme seuraavassa usein topologisen vektoriavaruuden topologian näkyviin alaindeksillä, esimerkiksi $E_\sigma = E_{\sigma(E,F)} = (E, \sigma(E, F))$. Heikko topologia on määritelty siten, että kaikilla $y \in F$ lineaarikuvaus $\langle \cdot, y\rangle \in E'$ on jatkuva $(E, \sigma(E, F)) \to \mathbb{K}$, ts.

$$\langle \cdot, y\rangle \in E^*_{\sigma(E,F)}.$$

Näin tulee luonnollisella tavalla määritellyksi lineaarikuvaus

$$F \to E^*_{\sigma(E,F)} : \quad y \mapsto \langle \cdot, y\rangle.$$

Tämä kuvaus on huomautuksen 7.6 mukaan injektio tasan silloin, kun dualiteetti (E, F) separoi avaruuden F. Seuraavan lauseen 7.12 mukaan se on toisaalta aina surjektio. Todistusta varten tarvitaan lineaarialgebrallinen lemma:

[45] Kirjallisuudessa dualiteetti oletetaan toisinaan molemmin päin separoivaksi heti määritelmässä.

Lemma 7.11. *Olkoon E' vektoriavaruuden E algebrallinen duaali ja $y, y_1, \dots, y_n \in E'$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä keskenään:*

$$y \text{ on lineaarikombinaatio lineaarimuodoista } y_1, \dots, y_n. \tag{7.1}$$

$$\mathrm{Ker}\,(y) \supset \mathrm{Ker}\,(y_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\,(y_n). \tag{7.2}$$

Todistus. Oletetaan, että $\mathrm{Ker}\,(y) \supset \mathrm{Ker}\,(y_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\,(y_n)$. Osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että joillakin $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$.

Tapaus $n = 1$: Oletetaan, että $\mathrm{Ker}\,(y) \supset \mathrm{Ker}\,(y_1)$. Voidaan olettaa, että kumpikaan lineaarimuoto ei ole pelkkä 0, vaan ytimet ovat hypertasoja, jolloin $\mathrm{Ker}\,(y) = \mathrm{Ker}\,(y_1)$. Lineaarimuotojen y ja y_1 kanoniset hajotelmat ovat

$$\begin{array}{ccccc} & & E/\mathrm{Ker}\,y & & \\ & \varphi \nearrow & & \searrow I & \\ E & & & & \mathbb{K} \\ & \varphi_1 \searrow & & \nearrow I_1 & \\ & & E/\mathrm{Ker}\,y_1 & & \end{array}$$

Koska $\mathrm{Ker}\,(y) = \mathrm{Ker}\,(y_1)$, niin $E/\mathrm{Ker}\,y_1 = E/\mathrm{Ker}\,y$ ja siis $\varphi_1 = \varphi$. Koska $E/\mathrm{Ker}\,y \sim \mathbb{K}$, niin $E/\mathrm{Ker}\,y$ on yksiulotteinen, joten lineaari-isomorfismit I ja I_1 eroavat toisistaan vain luvulla kertomisen verran.

Induktioaskel $n \to n+1$: Olkoon $H = \mathrm{Ker}\,y_{n+1}$ ja $g = y\,\big|_H$ sekä $g_k = y_k\,\big|_H$ kaikilla $k = 1, \dots, n+1$. Hypertasossa $H = \mathrm{Ker}\,y_{n+1}$ vallitsee induktio-oletuksen tilanne $\mathrm{Ker}\,(g) \supset \mathrm{Ker}\,(g_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\,(g_n)$, joten joillakin $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$. Tästä väite seuraa pienellä konstruktiolla tai — ehkä kätevämmin — vetoamalla uudelleen induktio-oletukseen: Koska selvästi

$$H = \mathrm{Ker}\,y_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\big(y - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\big),$$

niin on olemassa $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$, jolla $y - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \lambda_{n+1} y_{n+1}$. □

Lause 7.12. *Olkoon (E, F) dualiteetti. Luonnolliset kuvaukset*

$$F \to E^*_{\sigma(E,F)} : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle, \ \textit{ja}$$
$$E \to F^*_{\sigma(F,E)} : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$$

ovat surjektioita.

Todistus. Symmetriasyistä riittää todistaa ensimmäinen väite. Olkoon $x^* \in E^*_{\sigma(E,F)}$. Seminormi $|\langle \cdot, x^* \rangle|$ on jatkuva lokaalikonveksissa avaruudessa $E^*_{\sigma(E,F)}$, joten karakterisointilauseen 2.10 kohdan (9) mukaan on olemassa $\varepsilon > 0$ ja topologiaa $\sigma(E, F)$ määrittelevät seminormit

$$|\langle \cdot, y_1 \rangle|, \dots, |\langle \cdot, y_n \rangle|, \text{ missä } y_1, \dots, y_n \in F$$

siten, että

$$\varepsilon |\langle \cdot, x^* \rangle| < |\langle \cdot, y_1 \rangle| + \dots + |\langle \cdot, y_n \rangle|.$$

Erityisesti

$$\mathrm{Ker}\,\langle \cdot, y_1 \rangle \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\,\langle \cdot, y_n \rangle \subset \mathrm{Ker}\,\langle \cdot, x^* \rangle.$$

Edellisen lemman 7.11 nojalla x^* on lineaarikombinaatio lineaarimuodoista $\langle\cdot, y_1\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle\cdot, y_n\rangle$, ts. on olemassa luvut $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, joille

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle\cdot, y_i\rangle$$

ja $x^* = \langle\,\cdot\,, \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\rangle$ kuuluu siis itsekin avaruuden F kuvaan, kuten väitettiin. $\square$

Seuraus 7.13. *Olkoon (E, F) dualiteetti, joka separoi avaruuden E. Silloin luonnollinen kuvaus*

$$F \to E^*_{\sigma(E,F)} : y \mapsto \langle\cdot, y\rangle,$$

on bijektio, joten voidaan samaistaa F ja $E^*_{\sigma(E,F)}$.

Seuraus 7.14. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus — esimerkiksi normiavaruus — ja E^* sen topologinen duaali. Tällöin $E^* = E^*_{\sigma(E,E^*)}$, joten lineaarimuodolle $x^* \in E'$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *x^* on* heikosti jatkuva *eli jatkuva kuvauksena $E_{\sigma(E,E^*)} \to \mathbb{K}$.*
(ii) *x^* on jatkuva, eli $x^* \in E^*$.*
(iii) *Seminormi $|\langle\cdot, x^*\rangle|$ on jatkuva.*

Varoitus. Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus — esimerkiksi normiavaruus. E^*:n duaali *w^*-topologian* $\sigma(E^*, E)$ mielessä eli $(E^*_{\sigma(E^*,E)})^*$ on lauseen 7.12 nojalla alkuperäinen avaruus E. Merkintää E^{**} ei siis ole syytä käyttää tässä yhteydessä ilmoittamatta, mitä topologiaa avaruudessa E^* käytetään. Normiavaruuden tapauksessahan yleisin on duaalin normitopologia, jonka mielessä yhteys $E^{**} = E$ merkitsee, että E on refleksiivinen.

Lause 7.15. *Olkoon (E, F) dualiteetti, joka separoi avaruuden E. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *(E, F) separoi myös F:n.*
(ii) *E on tiheä algebrallisessa duaalissa $F'_{\sigma(F',F)}$.*

Todistus. Olkoon aluksi (i) voimassa. Koska dualiteetti (E, F) separoi avaruuden E, voidaan joka tapauksessa tulkita $E \subset F'$. On todistettava, että topologiassa $\sigma = \sigma(F', F)$ on $\bar{E} = F'$. Teemme tämän todistamalla, että nollamuodon $\bar{E} \to \mathbb{K}$ ainoa jatko koko avaruuden $F'_{\sigma(F',E)}$ jatkuvaksi lineaarimuodoksi on nollamuoto, jolloin Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen 3.8 mukaan $\bar{E} = F'$. Tarkastellaan siis sellaista topologiassa σ jatkuvaa lineaarimuotoa f avaruudessa F', että $E \subset \operatorname{Ker} f$. Koska f on σ-jatkuva, on sen ydin σ-suljettu ja siis myös $\bar{E} \subset \operatorname{Ker} f$. Koska $f \in {F'}^*_{\sigma(F',F)}$, on lauseen 7.12 mukaan olemassa $y \in F$ siten, että $f(y') = \langle y', y\rangle$ kaikilla $y' \in F'$. Erityisesti $\langle y', y\rangle = 0$ kaikilla $y' \in E$. Koska dualiteetti (E, F) separoi E:n, on siis $y = 0$ eli $f = 0$.

Paluutodistus on suoraviivainen verifiointi. $\square$

Lause 7.16. *Olkoon (E, F) dualiteetti, joka separoi avaruuden F ja olkoon $G \subset F$ aito aliavaruus. Tällöin heikko topologia $\sigma(E, F)$ on aidosti hienompi kuin $\sigma(E, G)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.63. $\square$

Lause 7.17. *Olkoon E vektoriavaruus. Tällöin $E'_{\sigma(E',E)}$ on algebrallisesti ja topologisesti isomorfinen avaruuden $\mathbb{K}^K$ kanssa, missä K on vektoriavaruuden E Hamel-kanta.*

Todistus. Jokainen lineaarikuvaus $x' : E \to \mathbb{K}$ määräytyy arvoista, jotka se antaa kantavektoreille. Siten x' voidaan tulkita kuvaukseksi $K \to \mathbb{K}$ eli avaruuden $\mathbb{K}^K$ alkioksi. Tämä vastaavuus on selvästi lineaarinen ja bijektio, siis lineaari-isomorfismi. Sekä avaruudessa $E'_{\sigma(E',E)}$ että avaruudessa $\mathbb{K}^K$ topologia saadaan *pisteittäisen suppenemisen seminormeista* eli *evaluaatiofunktionaalien itseisarvoista* $p_x(x') = |\langle x, x'\rangle|$, mutta tuloavaruudessa $\mathbb{K}^K$ vektori x käy tietenkin läpi vain kannan ja $E'_{\sigma(E',E)}$:ssa kaikki E:n vektorit. Tällä ei kuitenkaan ole merkitystä topologialle, koska kaikki E:n vektorit ovat E:n Hamel-kantavektorien äärellisiä lineaarikombinaatioita. □

Lause 7.18. *Olkoon (E, F) dualiteetti, joka separoi E:n, jolloin voi tulkita, että $E \subset F'$. Varustetaan algebrallinen duaali F' topologialla $\sigma = \sigma(F', F)$ ja E topologialla $\sigma = \sigma(E, F)$, joka tietenkin on topologian $\sigma(F', F)$ indusoima aliavaruustopologia. Tällöin*

a) Avaruuden E_σ täydentymä on E:n sulkeuma avaruudessa F'_σ.

b) Erityisesti, jos dualiteetti separoi myös avaruuden F, niin aliavaruuden E_σ täydentymä on koko F'_σ.

c) Erityisesti, jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin $E_{\sigma(E,E^*)}$:n täydentymä on topologisen duaalin algebrallinen duaali $(E^*)'$

Todistus. a) Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, on sitä myös jokainen tuloavaruus $\mathbb{K}^K$, ja edellisen lauseen 7.17 mukaan $F'_{\sigma(F',E)}$ on isomorfinen sellaisen kanssa, siis täydellinen. E:n täydentymä on siis E:n sulkeuma avaruudessa F'_σ.

b) Oletetaan, että dualiteetti on separoiva ja muistetaan, että lauseen 7.15 mukaan E on tiheä avaruudessa F'_σ. Avaruuden E täydentymä eli sulkeuma on siis koko F'_σ.

c) Dualiteetti (E, E^*) on lauseen 7.8 nojalla separoiva, joten väite seuraa b)-kohdasta. □

Lause 7.19. *Olkoon (E, F) separoiva duaalipari. Joukolle $A \subset E$ seuraavat ovat yhtäpitäviä heikossa topologiassa $\sigma = \sigma(E, F)$:*

(i) *Täydentymässä $\tilde{E}_\sigma$ sulkeuma $\bar{A}$ on kompakti.*
(ii) *A on täysrajoitettu.*
(iii) *A on rajoitettu.*

Todistus. Jokainen kompakti joukko on rajoitettu ja rajoitettu on täysrajoitettu, joten tehtäväksi jää vain todistaa paluuimplikaatio heikossa topologiassa. Olkoon $A \subset E_\sigma$ rajoitettu. Lauseen 7.18 mukaan E_σ:n täydentymä on $F'_\sigma \sim \mathbb{K}^K$ ja A on siis rajoitettu myös avaruuden $\mathbb{K}^K$ tulotopologiassa. Koska tuloavaruuden projektiot ovat jatkuvia, on jokainen $\pi_\alpha(A) \subset \mathbb{K}$ rajoitettu ja siis sen sulkeuma kompakti. Siis $A \subset \prod_\alpha \pi_\alpha(A) \subset \prod_\alpha \overline{\pi_\alpha(A)}$, joka on *Tihonovin klassisen lauseen* mukaan kompakti. Näin ollen $\bar{A}$ on kompakti täydentymässä $\tilde{E}_\sigma$. □

Kirjallisuudessa näkee osajoukkoa, jonka sulkeuma on kompakti, kutsuttavan *relatiivikompaktiksi*, kun taas joukko, jonka sulkeuma alkuperäisen avaruuden täydentymässä on kompakti, on *prekompakti*. Tässä terminologiassa edellinen lause sanoo, että separoivan duaaliparin heikossa topologiassa jokainen rajoitettu joukko on prekompakti. Missä tahansa topologisessa vektoriavaruudessa pätevät tietenkin implikaatiot:

kompakti $\Rightarrow$ relatiivikompakti $\Rightarrow$ prekompakti $\Rightarrow$ täysrajoitettu $\Rightarrow$ rajoitettu.

7.4. **Polaarit ja ortogonaalikomplementit.**

Huomautus 7.20. Tunnettu *Alaoglun lause*[46] sanoo, että normiavaruuden E duaalin yksikköpallo on $\sigma(E^*, E)$-kompakti. Haluamme yleistää tämän topologiselle vektoriavaruudelle E. Tarvittava heikko topologia on jo määritelty, mutta duaalin yksikköpallolle on keksittävä vastine. Sellaiseksi kelpaa origon ympäristön polaari, jonka määrittelemme seuraavassa.

Määritelmä 7.21. Olkoon (E, F) duaalipari.

(1) Joukon $A \subset E$ *polaari* on joukko $A^\circ = \{y \in F \mid |\langle x, y\rangle| \leq 1 \,\forall x \in A\}$.
(2) Joukon A polaarin polaaria $(A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$ sanotaan A:n *bipolaariksi*.
(3) Joukot $A \subset E$ ja $B \subset F$ ovat toisilleen *ortogonaaliset*, jos $\langle x, y\rangle = 0$ eli $x \perp y$ kaikille $x \in A$ ja $y \in B$.
(4) Joukon $A \subset E$ *ortogonaalikomplementti* on joukko $A^\perp = \{y \in F \mid \langle x, y\rangle = 0 \;\forall x \in A\}$.

Huomautus 7.22. Olkoon (E, F) duaalipari ja $A, B \subset E$. Polaarilla A° ja bipolaarilla $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ on seuraavat ominaisuudet:

(i) $A \subset B \implies B^\circ \subset A^\circ$
(ii) $(\operatorname{bal} A)^\circ = A^\circ$
(iii) $A \subset A^{\circ\circ}$
(iv) $A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$
(v) A° on balansoitu, konveksi ja $\sigma(F, E)$-suljettu
(vi) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.
(vii) $(\alpha A)^\circ = \frac{1}{\alpha} A^\circ$
(viii) Jos A on aliavaruus, niin $A^\circ = A^\perp$
(ix) $E^\circ = \{0\} \iff$ dualiteetti separoi F : n.
(x) A° on absorboiva $\iff A$ on $\sigma(E, F)$ − rajoitettu

Todistus. Väitteet ovat suoria seurauksia määritelmästä. Erityisesti polaari A° on $\sigma(F, E)$-suljettu, koska A° on heikossa topologiassa suljettujen yksikkösemipallojen $\{y \in F \mid |\langle x, \cdot\rangle| \leq 1\}$ $(x \in A)$ leikkaus. Kohdassa (x) on hyvä muistaa lause 6.2, jonka mukaan lokaalikonveksissa avaruudessa — erityisesti siis heikossa topologiassa — joukko on rajoitettu tasan silloin, kun jokainen määrittelevä seminormi on siinä rajoitettu, jolloin siis jokainen jatkuva seminormi on siinä rajoitettu.

Lause 7.23. (Banachin, Alaoglun ja Bourbakin lause)[47] *Topologisen vektoriavaruuden E topologisen kanonisen dualiteetin (E, E^*) mielessä origon ympäristön U polaari U° on $\sigma(E^*, E)$- eli w^*-kompakti.*

[46] Leonidas Alaoglu 1914 – 198, Kanada ja USA

[47] Nicolas Bourbaki on salanimi, jota käytti ryhmä pääasiassa ranskalaisia 1900-luvun matemaatikkoja.

Todistus. Esitämme kaksi erilaista todistusta.

1. tapa: Olkoon aluksi $U \in \mathcal{U}_0$ balansoitu. Origon ympäristönä U on absorboiva. Määrittelemme mittausfunktion[48] $p_U : E \to \mathbb{R}$

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda U\}.$$

Heikon topologian määritelmän mukaan $(E^*, \sigma(E^*, E))$ on tuloavaruuden $\mathbb{K}^E$ aliavaruus. Erityisesti

$$\begin{aligned} U^\circ &= \{x^* \in E^* \mid |\langle x, x^*\rangle| \le 1 \ \forall x \in U\} \\ &= \{x^* \in E^* \mid |\langle x, x^*\rangle| \le p_U(x) \ \forall x \in E\} \\ &\subset \{f \in \mathbb{K}^E \mid |f(x)| \le p_U(x) \ \forall x \in E\} \\ &= \prod_{x \in E} \{z \mid |z| \le p_U(x)\} \subset \mathbb{K}^E. \end{aligned}$$

Tulo $\prod_{x\in E}\{z \mid |z| \le p_U(x)\}$ on Tihonovin klassisen lauseen nojalla kompakti. Riittää siis todistaa, että U° on suljettu tuloavaruudessa $\mathbb{K}^E$.

Olkoon siis $f \in \mathbb{K}^E$ sulkeumassa $\overline{U^\circ} \subset \mathbb{K}^E$. Nyt f on lineaarinen, eli kaikille x, $y \in E$ ja λ, $\mu \in \mathbb{K}$ on

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

sillä tulotopologian määritelmän mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $f_\varepsilon \in U^\circ \subset E^*$, siis lineaarinen f_ε, jolle pisteissä $u = x$, y ja $\lambda x + \mu y$ pätee $|f(u) - f_\varepsilon(u)| = p_u(f - f_\varepsilon) < \varepsilon$, jolloin kolmioepäyhtälöä tavalliseen tapaan käyttäen saadaan

$$|f(\lambda x + \mu y) - (\lambda f(x) + \mu f(y))| \le |f_\varepsilon(\lambda x + \mu y) - (\lambda f_\varepsilon(x) + \mu f_\varepsilon(y))| + 3\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Lopuksi huomataan, että $f(x) \le 1$ kaikille $x \in U$, sillä jos $x \in U$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa $f_\varepsilon \in U^\circ$, jolle $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ ja kolmioepäyhtälöä uudelleen käyttäen saadaan $f(x) \le f_\varepsilon(x) + |f(x) - f_\varepsilon(x)| < 1 + \varepsilon$ ja siis, koska ε oli mielivaltainen, $f(x) \le 1$.

Jos tutkittava origon ympäristö U ei ole balansoitu, niin on kuitenkin lauseen 1.12. mukaan olemassa siihen sisältyvä balansoitu origon ympäristö B. Nyt $U^\circ \subset B^\circ$ on kompaktin joukon suljettuna joukkona itsekin kompakti topologiassa $\sigma(E^*, E)$.

2. tapa: Topologinen duaali $E^*_\sigma = E^*_{\sigma(E^*,E)}$ on algebrallisen duaalin $E'_{\sigma(E',E)}$ topologinen aliavaruus, joten riittää todistaa, että U° on kompakti avaruuden E'_σ siihen indusoimassa topologiassa. On periaatteessa syytä huomata, että U° on määritelty dualiteetin (E, E^*) suhteen. Mutta itse asiassa polaarit ovat samat, sillä jos $x' \in E'$ siten, että $|\langle \cdot, x'\rangle| \le 1$ origon ympäristössä $U \subset E$, niin x' on lauseen 2.10 nojalla jatkuva eli $x' \in E^*$. Koska bipolaari $U^{\circ\circ}$ sisältää origon ympäristön U, se on absorboiva, joten lauseen 7.22 kohdan (x) nojalla U° on rajoitettu avaruudessa E'_σ, jota vastaava dualiteetti on separoiva. Lauseen 7.19 nojalla U° on kompakti avaruuden E'_σ täydentymässä, mutta E'_σ on jo täydellinen. □

[48] p_U ei ilman konveksiusoletuksia ole seminormi, mutta emme seminormiominaisuuksia tässä tarvitsekaan. Vrt. 2.8.

Huomautus 7.24. Normiavaruuden E topologisen duaalin yksikköpallo $\bar{B}_{E^*} = \{x^* \in E^* \mid \|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x' x^* \rangle| \leq 1\}$ on sama asia kuin E:n yksikköpallon polaari B°.

(i) Alaoglun ja Bourbakin lauseesta saadaan siten erikoistapauksena klassinen Alaoglun lause, jonka mukaan normiavaruuden duaalin yksikköpallo on heikosti eli $\sigma(E^*, E)$-kompakti.

(ii) Sen sijaan on syytä muistaa, että alkuperäisen avaruuden suljettu yksikköpallo ei suinkaan yleisesti ole $\sigma(E, E^*)$-kompakti.

(iii) *Refleksiivisen* $(E = E^{**})$ avaruuden yksikköpallo on tietenkin kohdan (i) nojalla $\sigma(E, E^*)$-kompakti.

(iv) Erityisesti Hilbertin avaruuden suljettu yksikköpallo on siis heikosti kompakti.

(v) Hilbertin avaruuden rajoitetun jonon sulkeuma on siis heikosti kompakti.

Esitetään lopuksi vielä bipolaarilause, joka osoittaa erityisesti, että alkuperäisen avaruuden balansoidut, konveksit heikosti suljetut joukot ovat kaikki joidenkin joukkojen polaareja, nimittäin itsensä bipolaareja.

Lause 7.25. (Bipolaarilause) *Olkoon (E, F) dualiteetti. Joukon $A \subset E$ bipolaari on sen balansoitu, konveksi $\sigma(E, F)$-suljettu verho*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{bal}(A))}^{\sigma}.$$

Todistus. Koska balansoidun joukon konveksi verho ja sulkeuma ovat balansoituja ja konveksin joukon sulkeuma on konveksi, niin verho $V = \overline{co(\mathrm{bal}\, A)}^{\sigma}$ on suppein balansoitu, konveksi, $\sigma(E, F)$-suljettu joukko, joka sisältää A:n. Huomautuksen 7.22 mukaan bipolaari $A^{\circ\circ}$ on balansoitu, konveksi ja $\sigma(E, F)$-suljettu, joten se sisältää verhon V.

Varsinainen väite on siten käänteinen inkluusio. Jos se ei päde, niin on olemassa

$$x \in A^{\circ\circ} \setminus V.$$

Avaruudessa E on heikko topologia, joka on lokaalikonveksi. Käyttääksemme Banachin erottelulausetta 3.4 valitsemme pisteelle x konveksin, avoimen ympäristön Y, joka ei leikkaa verhoa V. Koska $A^{\circ\circ}$ on konveksi ja $\sigma(E, F)$-suljettu, Banachin erottelulauseen ehdot ovat voimassa joukoille Y ja V, joten on olemassa $x^* \in E^*$ ja luku $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\mathrm{Re}\langle v, x^* \rangle \leq \alpha < \mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle \quad \forall v \in V.$$

Koska $0 \in V$, niin $0 \leq \alpha < \mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle$. Korvaamalla luku α jollain luvulla $\beta \in]\alpha, \mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle[$ saadaan

$$0 \leq \alpha < \beta < \mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle.$$

Normeerataan epäyhtälöä vielä hiukan jakamalla puolittain luvulla β, merkitään $y^* = \frac{x^*}{\beta}$ ja saadaan

$$\mathrm{Re}\langle v, y^* \rangle < \mathbf{1} < \mathrm{Re}\langle x, y^* \rangle \quad \forall v \in V.$$

Koska verho V on balansoitu, niin siis $|\langle v, y^* \rangle| \leq 1 \quad \forall\, v \in V$. eli $y^* \in V^\circ$, sillä huomautuksen 7.6 ja lauseen 7.12 nojalla $E^* = F$. Toisaalta $1 < \mathrm{Re}\langle x, y^* \rangle$, joten $y^* \notin \{x\}^\circ \supset A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$. Tämä on mahdotonta, koska

$$A \subset V \implies A^\circ \supset V^\circ. \qquad \square$$

Seuraus 7.26. *Jos B on balansoitu, konveksi ja $\sigma(E,F)$-suljettu, niin $B^{\circ\circ} = B$.*

Seuraus 7.27. *Jos joukot A_i $(i \in I)$ ovat balansoituja, konvekseja ja $\sigma(E,F)$-suljettuja, niin $(\bigcap_{i\in I} A_i)^\circ$ on joukon $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ$ balansoitu, konveksi ja $\sigma(E,F)$-suljettu verho.*

Huomautus 7.28. $\mathbb{K}$-vektoriavaruuden *puoliavaruus* on joukko

$$H = \{x \in E \mid \operatorname{Re}\langle x, x'\rangle| \geq \alpha\},$$

missä $f \in E'$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{K}$-vektoriavaruuden *avoin puoliavaruus* on joukko $\{x \in E \mid \operatorname{Re}\langle x, f\rangle| > \alpha\}$, missä $f \in E'$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jos f on jatkuva eli $f \in E^*$, niin myös sen reaaliaosa $\operatorname{Re} f$ on jatkuva ja kääntäen, onhan $\operatorname{Re} f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)})$. (Vrt. 3.4) Tällöin puoliavaruus on suljettu joukko ja avoin puoliavaruus on avoin joukko.

Huomautus 7.29. a) Lokaalikonveksin avaruuden E konveksi osajoukko S on suljettu, jos ja vain jos S on joidenkin E:n suljettujen puoliavaruuksien leikkaus.

b) Lokaalikonveksin avaruuden konveksi osajoukko $S \subset E$ on suljettu tasan ollessaan heikosti eli $\sigma(E, E^*)$-suljettu.

Todistus. Koska suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu, riittää tarkastaa ehdon välttämättömyys. Olkoon siis S konveksi ja suljettu. Komplementti $C = E \setminus S$ on avoin. Olkoon $x \in C$. On olemassa pisteen x avoin ympäristö U, jolla $U \subset C$. Koska E on lokaalikonveksi, voidaan U valita konveksiksi.

Banachin erottelulauseen 3.4 mukaan on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f \in E^*$ ja reaaliluku α siten, että

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &< \alpha \quad \forall x \in U \text{ ja} \\ \operatorname{Re} f(x) &\geq \alpha \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

Siis $S \subset H = \{x \in E \mid \operatorname{Re} f(x) \geq \alpha\}$ ja $U \cap H = \emptyset$, erityisesti $x \notin H$. Tästä väite seuraa.

b) Kohdan a) mukaan lokaalikonveksin avaruuden konveksi suljettu osajoukko on leikkaus suljetuista puoliavaruuksista. Puoliavaruus on tietenkin suljettu tasan ollessaan heikosti suljettu.

Seuraus 7.30. *Olkoon E lokaalikonveksi ja $\emptyset \neq A \subset E$. Dualiteetin (E, E^*) mielessä $A^{\circ\circ}$ on joukon A balansoitu, konveksi, suljettu verho.*

Todistus. Bipolaarilauseen 7.25 mukaan $A^{\circ\circ}$ on joukon A balansoitu, konveksi, heikosti suljettu verho. Edellisen huomautuksen 7.29 mukaan se on suljettu myös E:n alkuperäisessä topologiassa. □

Todistetaan kappaleen päätteksi vielä Mackeyn lause, jonka mukaan lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden rajoitetut ja heikosti rajoitetut joukot ovat samat. Todistusta vasrten tarvitaan seuraava lemma.

Lause 7.31 (Lemma)**.** *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja B sen balansoitu, konveksi, rajoitettu osajoukko. Määritellään $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB \subset E^*$ ja varustetaan se balansoidun, konveksin ja absorboivan joukon $B \subset E_B$ mittausfunktiolla, joka osoittautuu normiksi, koska B on rajoitettu E:n alkuperäisessä Hausdorff-topologiassa τ, ja ansaitsee siis merkinnän $\|\cdot\|$. Oletetaan, että B on täydellinen topologian (E,τ) indusoimassa topologiassa. Väite: $(E_B, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Olkoon $(x_n)_\mathbb{N}$ Cauchy-jono avaruudessa $(E_B, \|\cdot\|)$. Koska B on täydellinen, se on myös suljettu ja siten tynnyri E_B:n topologiassa τ. Se on siis mittausfunktionsa suljettu yksikkösemipallo eli normiavaruuden $(E_B, \|\cdot\|)$ yksikköpallo. Cauchy-jono $(x_n)_\mathbb{N}$ avaruudessa $(E_B, \|\cdot\|)$ on rajoitettu, joten se sisältyy johonkin origokeskiseen palloon λB, joka oletuksen mukaan on täydellinen (E,τ):n indusoimassa topologiassa. Nyt $(x_n)_\mathbb{N}$ on Cauchy-jono myös avaruudessa (E,τ), mikä seuraa siitä, että B on oletuksen mukaan τ-rajoitettu. Siis $(x_n)_\mathbb{N}$ suppenee avaruudessa (E,τ) kohti jotain vektoria $y \in \lambda B \subset E_B$. Mutta tällöin se suppenee myös normitopologiassa, sillä kaikilla $\varepsilon > 0$ on $\|x_n - y\| \le \varepsilon$ riittävän suurilla n, onhan normi $\|\cdot\|$ τ-jatkuva. □

Lause 7.32. (Mackeyn lause)[49] *Lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu tasan ollessaan heikosti eli $\sigma(E,E^*)$-rajoitettu.*

Todistus. Tietenkin jokainen rajoitettu joukko on heikosti rajoitettu, koska heikko topologia $\sigma = \sigma(E,E^*)$ on karkeampi kuin E:n alkuperäinen topologia τ.

Olkoon $A \subset E$ heikosti eli $\sigma(E,E^*)$-rajoitettu. On osoitettava, että jokainen origon τ-ympäristö U absorboi joukon A. Todistuksen vaiheet ovat seuraavat:

(i) Koska E on alunperin lokaalikonveksi voidaan olettaa, että U on tynnyri.
(ii) Bipolaarilauseen 7.25 nojalla siis $U^{\circ\circ} = U$.
(iii) U° on balansoitu ja konveksi.
(iv) Alaoglun ja Bourbakin lauseen 7.23 nojalla U° on $\sigma(E^*,E)$-kompakti.
(v) Siis U° on $\sigma(E^*,E)$-täydellinen, koska se on täydellisen avaruuden $\sigma(E',E)$-kompakti osajoukko.
(vi) $\sigma(E^*,E)$-kompaktina U° on tietenkin $\sigma(E^*,E)$-rajoitettu.
(vii) Määritellään $E'_{U^\circ} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU^\circ \subset E^*$ ja varustetaan se balansoidun, konveksin ja absorboivan joukon U° mittausfunktiolla, joka osoittautuu normiksi ja ansaitsee merkinnän $\|\cdot\|$, koska U° oli rajoitettu Hausdorff-topologiassa $\sigma(E^*,E)$.
(viii) $(E^*_{U^\circ}, \|\cdot\|)$ on lemman 7.31 mukaan Banach-avaruus.
(ix) A on heikosti eli $\sigma(E,E^*)$-rajoitettu tarkoittaa, että kaikilla $x^* \in E^*$ lineaarimuoto $\langle\cdot, x^*\rangle$ on rajoitettu joukossa A eli $\sup_{x\in A} |\langle\cdot, x^*\rangle| < \infty$ jokaisessa pisteessä $x^* \in E^*$.
(x) Kaikilla $x \in E$ lineaarimuoto $\langle x, \cdot\rangle$ on tietenkin jatkuva avaruudessa $E^*_{\sigma(E^*,E)}$, joten erityisesti $A \subset (E^*_{\sigma(E^*,E)})^*$.
(xi) Koska avaruudessa $(E^*_{U^\circ}, \|\cdot\|)$ selvästikin on hienompi topologia kuin heikon topologian $\sigma(E^*,E)$ indusoima, niin lineaarimuoto $\langle x, \cdot\rangle$ on jatkuva myös Banach-avaruudessa $(E^*_{U^\circ}, \|\cdot\|)$.

[49] George Whitelaw Mackey 1916—2006, USA.

(xii) Lineaarikuvausperhe $\{\langle x, \cdot\rangle \mid x \in A\} \subset (E^*_{U^\circ}, \|\cdot\|)^*$ toteuttaa siis tasaisen rajoituksen periaatteen 4.24 ehdot, sillä se on (ix):n nojalla pisteittäin rajoitettu perhe kohdan (xi) mukaan jatkuvia lineaarikuvauksia Fréchet'n avaruuksien välillä.

(xiii) Näin ollen perhe $\{\langle x, \cdot\rangle \mid x \in A\}$ on yhtäjatkuva, eli

$$\sup_{x \in A,\, x^* \in U^\circ} = \lambda < \infty,$$

mikä merkitsee, että

$$A \subset \lambda U^{\circ\circ} = \lambda U.$$

Siis A on rajoitettu. □

7.5. **Dualiteettiin sopeutuvat topologiat.**

Määritelmä 7.33. Sanomme, että avaruuden E lokaalikonveksi topologia τ *sopeutuu dualiteettiin* (E, F), mikäli

$$E^*_\tau = F.$$

Esimerkki 7.34. Luonnollisesti lokaalikonveksin topologisen vektoriavaruuden (E, τ) alkuperäinen topologia τ sopeutuu dualiteettiin (E, E^*). Huomionarvoista on, että on olemassa muitakin sopeutuvia topologioita, esimerkiksi seuraavat:

a) Jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin heikko topologia $\sigma(E, E^*)$ on karkein eli heikoin topologia, joka sopeutuu dualiteettiin (E, E^*).

b) Jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $\mathcal{T}$ vektoriavaruuden lokaalikonveksi topologia, joka on hienompi kuin $\sigma(E, E^*)$ ja karkeampi kuin alkuperäinen topologia τ niin $\mathcal{T}$ sopeutuu dualiteettiin (E, E^*).

c) Jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin alkuperäinen topologia τ ei kuitenkaan välttämättä ole hienoin topologia, joka sopeutuu dualiteettiin (E, E^*). Tästä on esimerkkejä seuraavassa kappaleessa 7.6.

Sopeutuvien topogioiden merkitys perustuu pitkälti seuraavaan lauseeseen:

Lause 7.35. *Olkoon* (E, F) *separoiva dualiteetti.*

(i) *Konveksilla joukolla* $A \subset E$ *on sama sulkeuma kaikissa dualiteettiin* (E, F) *sopeutuvissa topologioissa.*

(ii) *Avaruuden* E *tynnyrit ovat siis samat jokaisessa dualiteettiin* (E, F) *sopeutuvassa topologiassa.*

Todistus. Seuraa lauseesta 7.29. □

7.6. **Polaaritopologiat.**

Määritelmä 7.36. Olkoon (E, F) separoiva dualiteetti ja $\mathfrak{S}$ perhe avaruuden E heikosti rajoitettuja joukkoja. *Perheen* $\mathfrak{S}$ *virittämä polaaritopologia* on avaruuden F lokaalikonveksi topologia, jonka origon ympäristökannan muodostavat perheen $\mathfrak{S}$ joukkojen polaarien äärelliset leikkaukset:

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{S}} = \Big\{\varepsilon \bigcap_I A_i^\circ \;\Big|\; A_i \in \mathfrak{S},\ \varepsilon > 0\ I \text{ äärellinen}\Big\}.$$

Synonyymeja: $\mathfrak{S}$*-topologia,* $\mathfrak{S}$*-suppenemisen topologia, tasaisen suppenemisen topologia* $\mathfrak{S}$*-joukoissa.* , *polaaritopologia* perheen $\mathfrak{S}$ suhteen.

Esimerkki 7.37. a) Perusesimerkki polaaritopologiasta on heikko topologia $\sigma(F, E)$, joka saadaan valitsemalla esimerkiksi $\mathfrak{S} = \{A \subset E \bigm| A \text{ on äärellinen}\}$, $\mathfrak{S} = \{A \subset E \bigm| A \text{ on yksipisteinen}\}$ tai $\mathfrak{S} = \{A \subset E \bigm| A \text{ on äärellisen joukon balansoitu, konveksi verho}\}$. Heikko topologia on duaaliparin (E, F) karkein $\mathfrak{S}$-topologia.

b) Toinen klassinen esimerkki on ns. *vahva topologia* $b(E, F)$, joka saadaan valitsemalla $\mathfrak{S} = \{A \subset E \bigm| A \text{ on } \sigma(E, F)\text{-rajoitettu}\}$. Vahva topologia on duaaliparin (E, F) hienoin $\mathfrak{S}$-topologia eli hienoin dualiteettiin (E, F) sopeutuva avaruuden E topologia. c) *Kompaktin konvergenssin topologia* $c(E, F)$ saadaan valitsemalla $\mathfrak{S} = \{A \subset E \bigm| A \text{ on } \sigma(E, F)\text{-kompakti}\}$.

d) Normiavaruuden duaalin tavallinen duaalinormitopologia on polaaritopologia, joka saadaan dualiteetista (E, E^*) ja yhden joukon sisältävästä perheestä $\mathfrak{S} = \{\text{yksikköpallo}\}$.

Huomautus 7.38. a) $\mathfrak{S}$-topologia on lokaalikonveksi ja saadaan polaarien A°, $A \in \mathfrak{S}$ mittausfunktioista $p_A(y) = \sup_{x \in A} |\langle x, y\rangle|$.

b) Jos $\mathfrak{S}$ toteuttaa molemmat ehdot:

(i) kaikilla $A, B \in \mathfrak{S}$ on olemassa $C \in \mathfrak{S}$ siten, että $A \cup B \subset C$

(ii) kaikilla $A \in \mathfrak{S}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ on olemassa $B \in \mathfrak{S}$ siten, että $\lambda A \subset B$,

niin $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}} = \{A^\circ \bigm| A \in \mathfrak{S}\}$.

c) Jos $\mathfrak{S}$ toteuttaa ehdon

$$\bigcup_{\mathfrak{S}} A = E,$$

niin $\mathfrak{S}$-topologia on hienompi kuin heikko topologia $\sigma(F, E)$ ja siis Hausdorff.

d) Välttämätön ja riittävä ehto sille, että $\mathfrak{S}$-topologia on Hausdorff on itse asiassa seuraava:

(i) dualiteeti (E, F) separoi F:n ja

(ii) yhdisteen $\bigcup \mathfrak{S}$ lineaarinen verho on heikosti eli $\sigma(E, F)$-tiheä avaruudessa E.

Todistus. Kohtien a)-c) todistrus on harjoitustehtävä 0.0.75. Kohdan d) todistus: Lokaalikonveksi topologia on huomautuksen 2.9 mukaan Hausdorff aina ja vain, kun jokaisella nollasta eroavalla vektorilla jokin virittävä seminormi saa nollasta eroavan arvon. Erityisesti siis $\mathfrak{S}$-topologia on Hausdorff sillä ehdolla, että jos $p_A(y) = 0$ kaikilla $A \in \mathfrak{S}$, niin $y = 0$, eli ehdolla $\bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A^\perp = \{0\}$.

Oletetaan aluksi, että $\mathfrak{S}$-topologia on Hausdorff eli $\bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A^\perp = \{0\}$. Jos dualiteetti ei separoi F:n pisteitä, niin on olemassa $y \in F \smallsetminus \{0\}$, jolla $|\langle x, y\rangle| = 0$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti silloin $p_A(y) = \sup_{x \in A} |\langle x, y\rangle| = 0$ kaikilla $A \in \mathfrak{S}$ eli $y \in \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A^\perp = \{0\}$ ja siis $y = 0$ vastoin oletusta. Jos taas yhdisteen $\bigcup \mathfrak{S}$ lineaarinen verho V ei ole heikosti eli $\sigma(E, F)$-tiheä, niin on olemassa sen sulkeumaan $\bar{V}$ kuulumaton $x \in E$. Mazurin laajennuslauseen seurauksen 3.3 nojalla on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f \in E^*$, joka saa pisteessä x arvon 1 ja aliavaruudessa $\bar{V}$ arvon 0. Surjektiivisuuslauseen 7.12 nojalla voidaan valita $y \in F$ siten, että $f(x) = \langle y, x\rangle$ kaikilla $x \in E$, jolloin $y \in \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A^\perp \smallsetminus \{0\}$ vastoin oletusta.

Oletetaan seuraavaksi, että ehdot (i) ja (ii) pätevät. Yhdisteen $\bigcup\mathfrak{S}$ lineaarinen verho V on heikosti eli $\sigma(E,F)$-tiheä, joten ei ole olemassa muita kaikissa $A \in \mathfrak{S}$ häviäviä jatkuvia lineaarimuotoja kuin $f = 0$. Separointioletuksen (11) nojalla voidaan valita vain yksi $y \in F$ siten, että $f(x) = \langle y, x\rangle = 0$ kaikilla $x \in E$, ja se y on tietenkin 0. Jos siis $y \in F$ siten, että $p_A(y) = 0$ kaikilla $A \in \mathfrak{S}$, niin $y = 0$, joten $E_{\sigma(E,F)}$ on Hausdorff. □

Lause 7.39. *$\mathfrak{S}$-topologia ei muutu, jos $\mathfrak{S}$:n joukot korvataan seuraavasti*

a) *Lisätään $\mathfrak{S}$:n joukkojen osajoukkoja.*
b) *Lisätään $\mathfrak{S}$:n joukkojen äärellisiä yhdisteitä.*
c) *Lisätään joukkoja $\lambda A,\ A \in \mathfrak{S},\ \lambda \in \mathbb{K}$.*
d) *Lisätään $\mathfrak{S}$:n joukkojen balansoituja verhoja.*
e) *Lisätään $\mathfrak{S}$:n joukkojen heikkoja eli $\sigma(E,F)$-sulkeumia.*
f) *Lisätään $\mathfrak{S}$:n joukkojen bipolaareja.*

Todistus. Lause perustuu polaarin ominaisuuksiin 7.22:

a) Jos $B \subset A \in \mathfrak{S}$, niin $A^\circ \subset B^\circ$ ja siis $B^\circ \in \mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.
b) Jos $A, B \in \mathfrak{S}$, niin $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \in \mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$
c) Jos $A \in \mathfrak{S}$ ja $\lambda \neq 0$, niin $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ \in \mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$. Jos taas $\lambda = 0$, niin $(\lambda A)^\circ = \{0\}^\circ = F \in \mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.
d) Jos $A \in \mathfrak{S}$, niin $(\operatorname{bal} A)^\circ = A^\circ \in \mathfrak{S}$.
e) Jos $A \in \mathfrak{S}$, niin $(\bar{A}^\sigma)^\circ = A^\circ \in \mathfrak{S}$, sillä bipolaarilauseen 7.25 nojalla $A \subset \bar{A}^\sigma \subset A^{\circ\circ}$, joten $A^\circ = A^{\circ\circ\circ} \subset (\bar{A}^\sigma)^\circ \subset A^\circ$.
f) Bipolaarit ovat bipolaarilauseen 7.25 mukaan samoja kuin heikosti suljetut, balansoidut, konveksit verhot.

□

Lause 7.40. *Jokaisen lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden E topologia τ on $\mathfrak{S}$-topologia, missä $\mathfrak{S} = \{A \subset E^* \mid A$ on yhtäjatkuva$\}$.*

Todistus. Määritelmän 4.23 mukaan $A \subset E^*$ on yhtäjatkuva, mikäli

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}\ \exists V \in \mathcal{U}_\tau \text{ siten, että } f(V) \subset U \text{ kaikilla } f \in A.$$

Valitsemalla $U = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \le 1\}$ huomaa, että joukko $A \subset E^*$ on tasan silloin yhtäjatkuva, kun $A \subset U^\circ$ jollekin $U \in \mathcal{U}_\tau$. Jokainen yhtäjatkuva joukko $A \subset E^*$ on siis Alaoglun ja Bourbakin lauseen 7.23 mukaan peräti heikosti kompakti, siis heikosti rajoitettu, joten ainakin on olemassa mainittu $\mathfrak{S}$-topologia.

Valitaan avaruuden E alkuperäiselle topologialle τ tynnyreistä muodostuva ympäristökanta $\mathcal{K}$. Bipolaarilauseen 7.25 ja lauseen 7.35 nojalla on $T = T^{\circ\circ}$ kaikilla $T \in \mathcal{K}$. Koska $T \in U_\tau$, niin $T^\circ \subset E^*$ on yhtäjatkuva. Näin on todistettu, että T on jonkin yhtäjatkuvan joukon polaari ja siis origon $\mathfrak{S}$-ympäristö. Alkuperäinen topologia on siis karkeampi kuin $\mathfrak{S}$-topologia. Toisensuuntainen päättely on helppo: Olkoon $A \in \mathfrak{S}$ eli A yhtäjatkuva. Totesimme yllä, että tämä on sama asia kuin $A \subset U^\circ$ jollekin $U \in \mathcal{U}_\tau$. Voidaan olettaa, että U on tynnyri, jolloin bipolaarilauseen nojalla $U = U^{\circ\circ}$ ja siis $A^\circ \supset U^{\circ\circ} = U \in \mathcal{U}_\tau$. $\mathfrak{S}$-topologia on siis myös karkeampi kuin alkuperäinen topologia. □

Seuraava lause, Mackeyn ja Arensin lause 7.41, karakterisoi sopeutuvat topologiat $\mathfrak{S}$-topologina. Todistusta varten on hyvä muistaa lause 7.19, jonka mukaan separoivan dualiteetin (E, F) heikossa topologiassa $\sigma(E, F)$ joukko $A \subset E$ on rajoitettu tasan ollessaan täysrajoitettu.

Lause 7.41. (Mackeyn ja Arensin lause)[50] *Olkoon (E, F) separoiva dualiteetti ja τ jokin vektoriavaruuden E lokaalikonveksi topologia. Välttämätöntä ja riittävää sille, että $E^*_\tau = F$ eli, että τ sopeutuu dualiteetiin (E, F) on, että τ on $\mathfrak{S}$-topologia, missä*

(i) $\bigcup \mathfrak{S} = F$
(ii) *Jokainen $A \in \mathfrak{S}$ on balansoitu, konveksi ja $\sigma(F, E)$-kompakti.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että τ sopeutuu dualiteetiin (E, F) eli $F = E^*_\tau$. Topologialla τ on tynnyreistä muodostuva origon ympäristökanta $\mathcal{B}$. Olkoon $\mathfrak{S} = \mathcal{B}^\circ = \{U^\circ \mid U \in \mathcal{B}\}$. Alaoglun ja Bourbakin lauseen 7.23 nojalla $\mathfrak{S}$:n joukot ovat $\sigma(F, E)$-kompakteja. Bipolaarilauseen 7.25 mukaan $U = U^{\circ\circ} = (U^\circ)^\circ$. Siis $\mathcal{B} = \{A^\circ \mid A \in \mathfrak{S}\}$, joten τ on $\mathfrak{S}$-topologia.

Ehto (ii) on jo verifioitu. Tarkastetaan ehto (i): Olkoon $y \in F$. Koska τ sopeutuu dualiteettiin (E, F), niin lineaarimuoto $y = \langle \cdot, y\rangle \in E'$ on τ-jatkuva, joten on olemassa $U \in \mathcal{B}$, jossa $|y|$ saa enintään arvon 1, jolloin $y \in U^\circ$. Siis $\bigcup \mathfrak{S} = F$. Lauseen ehto on siis välttämätön.

Ehtojen riittävyyden todistamiseksi oletetaan seuraavaksi, että (i) ja (ii) ovat voimassa ja osoitetaan, että $\mathfrak{S}$-topologian τ suhteen $E^* = F$.

Osoitetaan ensin, että $E^* \supset F$. Tälle riittää, että τ on hienompi kuin heikko topologia $\sigma(F, E)$. Mutta näin asia onkin: jos nimittäin $B \subset A \in \mathfrak{S}$, niin $\mathcal{U}_\tau \ni A^\circ \supset B^\circ$ ja siis $B^\circ \in \mathcal{U}_\tau$. Oletuksen (ii) mukaan jokaisella $y \in F$ on olemassa $A \in \mathfrak{S}$, jolla $\{y\} \subset A$, joten siis erityisesti $\{y\}^\circ \in \mathcal{U}_\tau$.

Osoitetaan sitten, että $E^* \subset F$. Koska $E^* \supset F$, niin heikko topologia $\sigma(F, E)$ on topologian $\sigma(E^*, E)$ indusoima aliavaruustopologia, joten oletuksesta (ii) seuraa, että jokainen $A \in \mathfrak{S}$ on $\sigma(E^*, E)$-kompakti ja siis $\sigma(E^*, E)$-suljettu. Bipolaarilauseen 7.25 nojalla siis $A^{\circ\circ} = A$ kaikilla $A \in \mathfrak{S}$. Olkoon $x^* \in E^*$. Koska x^* on jatkuva $\mathfrak{S}$-topologian τ suhteen, x^* on rajoitettu jossain origon τ-kantaympäristössä, joten on olemassa $A \in \mathfrak{S}$ siten, että $|\langle x, x^*\rangle \leq 1$ kaikilla $x \in A^\circ$. Tämä merkitsee, että $x^* \in A^{\circ\circ} = A \subset F$. $\square$

Määritelmä 7.42. Olkoon (E, F) duaalipari, joka separoi F:n. *Mackeyn topologia* $\tau(E, F)$ on avaruuden E $\mathfrak{S}$-topologia, missä $\mathfrak{S} = \{A \subset F \mid A$ on balansoitu, konveksi ja $\sigma(E, F)$-kompakti$\}$.

Lokaalikonveksi avaruus E, jonka topologia yhtyy dualiteetin (E, E^*) antamaan Mackeyn topologiaan $\tau(E, F)$, on *Mackeyn avaruus*

Lause 7.43. *Jos duaalipari (E, F) separoi F:n, niin avaruuden E Mackeyn topologia $\tau(E, F)$ on hienoin duaalipariin (E, F) sopeutuva topologia eli vahva topologia $b(E, F)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.78. $\square$

[50] Richard Friederich Arens 1919—2000 Saksa $\to$ USA.

Lause 7.44. *Lokaalikonveksi avaruus E on tynnyriavaruus tasan silloin, kun sen topologia yhtyy dualiteetin (E, E^*) antamaan vahvaan topologiaan $b(E, E^*)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.79. □

Lause 7.45. *Jokainen tynnyriavaruus on Mackeyn avaruus, samoin jokainen bornologinen avaruus.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.81. □

Seuraus 7.46. *Koska jokainen metrisoituva lokaalikonveksi avaruus on lauseen 6.13 mukaan bornologinen, niin jokainen metrisoituva lokaalikonveksi avaruus on Mackeyn avaruus.* □

Distribuutiot

8. Distribuutioteorian idea

8.1. Testifunktiot ja distribuutiot.

Huomautus 8.1. Distribuutioteoria tekee mahdolliseksi mm. derivoida lähes kaikkia funktioita. Tämä saadaan aikaan hyväksymällä derivaatoiksi muitakin objekteja kuin funktioita, nimittäin distribuutioita eli yleistettyjä funktioita, esimerkiksi mittoja. Distribuutioteoria sopii mainiosti vaikkapa usean muuttujan kompleksikertoimisten Banach-arvoisten funktioiden käsittelyyn, mutta rajoitumme seuraavassa enimmäkseen yhden reaalimuuttujan kompleksiarvoisiin funktioihin välttääksemme epäolennaisia merkintöjen mutkia. Kun ei toisin sanota, D on derivointi $\frac{d}{dx}$ ja integroimme Lebesguen mitan dx suhteen. Merkinnällä dm tarkoitamme mittaa $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. Motivoidaksemme seuraavia määritelmiä tarkastelemme aluksi funktion ja sen derivaatan käsitettä heuristiselta kannalta.

Esimerkki 8.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *lokaalisti integroituva* funktio, ts. oletamme, että integraali $\int_K f$ on olemassa aina, kun $K \subset \mathbb{R}$ on kompakti. Hieman samaan tapaan kuin L^p-avaruuksien duaaleja tarkastellessemme kiinnitämme huomiota siihen, että f liittää jokaiseen riittävän säännölliseen ”testifunktioon” φ luvun

$$\langle \varphi, f\rangle = \int f\varphi$$

ja että kuvaus

$$\Lambda_f : \varphi \mapsto \langle \varphi, f\rangle = \int f\varphi$$

on muuttujan φ suhteen lineaarinen ja jatkuva. Funktio f voidaan samaistaa tähän lineaarikuvaukseen, mikäli testifunktioiden joukkoon kelpuutetaan niin paljon eri funktioita, että $\langle f, \varphi\rangle$:n arvot määräävät funktion f arvot melkein kaikkialla. Tälle on riittävää, että testifunktioiksi kelpuutetaan kaikki rajoitetun välin ulkopuolella häviävät eli *kompaktikantajaiset* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$-funktiot φ.

Jos f on jatkuvasti derivoituva ja φ kompaktikantajainen, niin pätee osittaisintegroinnin kaava

$$\int Df\varphi = -\int fD\varphi,$$

missä pois jätetty sijoitustermi on 0, koska φ on kompaktikantajainen. Tämä antaa aiheen määritellä ”distribuution”

$$\Lambda_f :\ \varphi \mapsto \langle \varphi, \Lambda_f\rangle = \langle \varphi, f\rangle = \int f\varphi$$

derivaatta ”distribuutioksi”

$$D\Lambda_f :\ \varphi \mapsto \langle \varphi, D\Lambda_f\rangle = -\int fD\varphi.$$

Periaatteessa näin voisi funktioista lähtemällä määritellä distribuution käsitteen sopimalla, että distribuutioita ovat lokaalisti integroituvat funktiot ja niiden kaikenasteiset derivaatat. On kuitenkin muistettava sopia siitä, mitkä funktiot muodostavat testifunktioiden avaruuden. Tässä on hieman vaivaa, vaikka toisaalta valinnan varaakin. Tarkkana saa olla myös testifunktioavaruuden topologiaa määritellessään. Suotavaa olisi tietysti muodostaa niin testifunktioista kuin itse distribuutioistakin topologinen vektoriavaruus, mielellään mahdollisimman hyvin ominaisuuksin. Erityisesti pidetään tavoitteena, että derivointi olisi jatkuva lineaarikuvaus. Huomattakoon, että distribuutiot heuristisesti määrittelevä kuvaus $(\varphi, f) \mapsto \langle \varphi, f \rangle = \int f\varphi$ on dualiteetti.

9. Schwartzin testifunktiot

Jatkuvien funktioiden avaruuksien $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ja Lebesguen funktioavaruuksien $L^p(\mathbb{R})$ ohella tärkeitä funktioavaruuksia ovat Sobolevin[51] avaruudet, joissa L^p-tyyppinen normi ulotetaan koskemaan myös distribuutioderivaattoja. Sallimalla ratkaisuiksi muitakin kuin klassisesti derivoituvia funktioita voi helpottaa mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemista.

Teorian ymmärtämiseksi on edullisinta määritellä ensimmäiseksi ns. Schwartzin[52] testifunktioavaruudet $\mathcal{D}(\Omega)$, jotka ovat lokaalikonvekseja, täydellisiä, mutta metrisoitumattomia. Fourier-muunnoksen yhteydessä otamme käyttöön myös "hitaasti kasvavien distribuutioiden" testifunktioavaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

9.1. Avaruudet $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Määritelmä 9.1. Jatkuvan funktion φ *kantaja* $\operatorname{supp}\varphi$ on joukon $\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}$ sulkeuma.

Määritelmä 9.2. Olkoon seuraavassa joukko $\Omega \subset \mathbb{R}$ avoin ja $K \subset \Omega$ kompakti. Määrittelemme funktioavaruudet

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall\, k\, \exists\, D^k\varphi\}$$
$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\}.$$

Huomaa pieni ero tehtävässä 0.0.28 määritellyn avaruuden $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ ja avaruuden $\mathcal{D}_{[0,1]}(\mathbb{R})$ välillä; jälkimmäisen funktiot häviävät välin päissä. Sen sijaan tehtävässä 0.0.49 esiintynyt $\mathcal{C}_{[0,1]}(\mathbb{R})$ on sama asia kuin $\mathcal{D}_{[0,1]}(\mathbb{R})$.

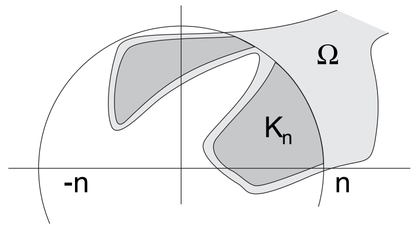
Seuraavaksi varustamme avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *metrisellä standarditopologiallaan* eli *kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologialla*. Avaruus $\mathcal{D}_K(\Omega)$ on avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ lineaarinen ja topologinen aliavaruus.

Määritelmä 9.3. Olkoon $K_1, K_2, \ldots$ avoimen joukon Ω *tyhjennys* eli jono kompakteja joukkoja siten, että

$$K_1 \subset \operatorname{int} K_2, \quad K_2 \subset \operatorname{int} K_3, \ \ldots \ \subset \Omega$$

[51]Sergei Lvovitš Sobolev 1908–1989,Venäjä/Neuvostoliitto.

[52]Laurent-Moïse Schwartz 1915–2002, Ranska. Kirja [5] Théorie des Distributions 1950–1951.



KUVA 10. Kaksiulotteisen joukon tyhjennys kompakteilla joukoilla

ja jokaisella Ω:n kompaktilla joukolla $K \subset \Omega$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $K \subset K_n$. Esimerkiksi[53] $K_n = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq n$ ja $\mathrm{d}(x, \partial\Omega) \leq \frac{1}{n}\}$ tyhjentää avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{R}$, koska kompaktin osajoukon *etäisyys* joukon Ω reunasta eli $d(K, \partial\Omega) = \inf\{d(k, \omega) \mid k \in K, \omega \in \partial\Omega\}$ on positiivinen (harjoitustehtävä 0.0.84).

Seminormit, itse asiassa normit

$$p_i(\varphi) = \sup\{\, |D^k\varphi(x)| \;\big|\; k \leq i,\, x \in K_i\} \quad i \in \mathbb{N}$$

määräävät avaruuteen $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ lokaalikonveksin topologian, joka ei riipu jonon $K_1, K_2, \ldots$ valinnasta. Sanomme sitä *kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin* topologiaksi, koska tässä topologiassa $\varphi_n \to \varphi$ merkitsee, että $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ derivaattoineen tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa.

Lause 9.4. *Kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologialla on avaruuksissa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\mathcal{D}_K(\Omega)$ seuraavat ominaisuudet:*

(1) $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *ja siis myös sen aliavaruudet $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ovat metrisoituvia.*
(2) Evaluaatiofunktionaalit $\varphi \mapsto \varphi(x)$ *ovat jatkuvia.*
(3) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ *on $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$:n suljettu aliavaruus.*
(4) $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *on täydellinen, siis Frèchet'n avaruus.*
(5) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ *on Frèchet'n avaruus.*

Todistus. Topologian metrisoituvuus seuraa lauseesta 4.5, koska määrittelevien seminormien joukko on numeroituva. Evaluaatiofunktionaalien jatkuvuus on lauseen 2.15 valossa ilmeistä. Joukko $\mathcal{D}_K(\Omega) = \bigcap_{x \notin K} \mathrm{Ker}\,(\varphi \mapsto \varphi(x))$ on siis suljettujen hypertasojen leikkauksena suljettu aliavaruus.

Avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ täydellisyyden todistamiseksi valitaan Cauchy-jono $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Olkoon $i \in \mathbb{N}$ kiinnitetty. Seminormin p_i mielessä $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy, joten erityisesti jono $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti kompaktissa joukossa K_i. Sama koskee sen derivaattoja kertalukuun i asti. Analyysistä tutun lauseen nojalla tämä takaa, että joukoissa K_i myös rajafunktio g on derivoituva kertalukuun i asti ja $D^k\varphi_n \to D^k g$ tasaisesti kertalukuun i asti. Kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologian määritelmän mukaan tämä tapahtuu jokaisen $x \in \Omega$ ympäristössä kaikissa kertaluvuissa, mitä väitettiinkin.

Samalla tuli todistetuksi suljetun aliavaruuden $\mathcal{D}_K(\Omega)$ täydellisyys. □

[53]Kuva on selvyyden vuoksi kaksi- eikä yksiulotteinen. Teoriamme yleistyykin vaivatta avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Huomautus 9.5. Vaikka seminormit p_j ovat normeja avaruudessa $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$, $i \leq j$, ja jono $(p_j)_{j\in N}$ on jopa kasvava, eivät avaruudet $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ ole normiavaruuksia. Tämän voi todistaa näyttämällä, että ne ovat ääretönulotteisia, mutta kuitenkin niillä on[54] ääretönulotteiselle normiavaruudelle huomautuksen 6.7 mukaan mahdoton *Heinen ja Borelin ominaisuus*, jonka mukaan jokainen suljettu, rajoitettu joukko on kompakti.

Todistus. Harjoitustehtäväsarja 0.0.88. Ks. myös 9.17 .

9.2. **Schwartzin testifunktioavaruus $\mathcal{D}(\Omega)$.**

Määritelmä 9.6. Määrittelemme *Schwartzin testifunktioiden avaruuden* eli *testifunktioavaruuden* kompaktikantajaisten $\mathcal{C}^\infty$-funktioiden avaruudeksi

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \text{ on kompakti} \subset \Omega\}.$$

Huomautus 9.7. Olkoon $K_1, K_2, \ldots$ avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{R}$ tyhjennys. Silloin

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_i}(\Omega).$$

Huomautus 9.8. $\mathcal{D}(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Perustelu. Olkoon $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ ja

$$p_i(f) = \sup\{\, |D^k f(x)| \;\big|\; k \leq i,\, x \in K_i\}$$

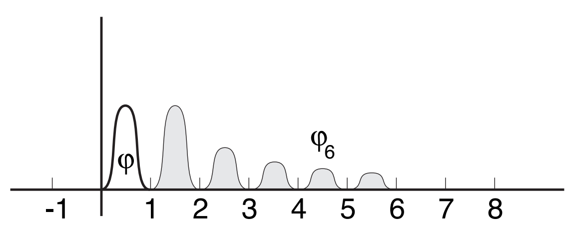
avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ topologian kantaseminormi. Koska $K_i \subset \Omega$ on kompakti, on olemassa kompaktikantajainen apufunktio $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, joka saa joukossa K_i arvon 1. Nyt $\psi f \in \mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ ja $p_i(\psi f - f) = 0 < \varepsilon$.

Huomautus 9.9. Erityisesti siis $\mathcal{D}(\Omega)$ ei ole suljettu avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ eikä siis myöskään täydellinen avaruudesta $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ perimässään aliavaruustopologiassa.

Huomautus 9.10. Kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologia eli avaruudesta $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ periytyvä aliavaruustopologia valittiin kohdassa 9.1 standarditopologiaksi avaruuksiin $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Se saadaan normeista (vrt. tehtävä 0.0.82).

$$\|\varphi\|_j = \|D^j\varphi\|_\infty, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Olisi houkuttelevaa käyttää kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologiaa myös koko testifunktioavaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ topologiana, mutta asiassa on hankaluus: se ei tee avaruudesta $\mathcal{D}(\Omega)$ edes jonotäydellistä. Vastaesimerkki on helppo keksiä:



Kuva 11. Jonon konstruktio

[54]Perustuu tärkeään *Ascolin (Giulio Ascoli 1843–1896, Italia) lauseeseen*, Liite 0.0.114.

Valitse $\Omega = \mathbb{R}$. On olemassa $\mathcal{C}^\infty$-funktio $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$, joka saa välillä $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ arvon 1 ja välin $[0,1]$ ulkopuolella arvon 0. Kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologiassa avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ suppenemattomaksi Cauchy-jonoksi osoittautuu $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä

$$\varphi_n(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + \cdots + \frac{1}{n}\varphi(x-n).$$

Siksi varustamme testifunktioavaruuden korjatulla topologialla luopuen metrisoituvuudesta täydellisyyden saavuttamiseksi :-)

Määritelmä 9.11. *Testifunktioavaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ standarditopologia* τ määritellään seuraavasti:

(1) Origon τ-ympäristökantajoukkoja olkoot kaikki sellaiset balansoidut, konveksit joukot $U \subset \mathcal{D}(\Omega)$, joille $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ on kaikille kompakteille $K \subset \Omega$ origon ympäristö $\mathcal{D}_K(\Omega)$:ssa.

(2) Muiden pisteiden ympäristöt saadaan origon ympäristöistä siirrolla:

$$U \in \mathcal{U}_x \iff U - x \in \mathcal{U}_0.$$

Huomautus 9.12. Käytämme tätä topologiaa testifunktioavaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$, kun ei toisin mainita. Osoittautuu, että se tekee testifunktioavaruudesta täydellisen, mutta metrisoitumattoman. Seuraava lause 9.14 osoittaa, että testifunktioavaruuden metrisoitumattomuus ei aiheuta kovin pahoja ongelmia, koska monet tarkastelut voi tehdä avaruuksissa $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Huomautus 9.13. Määrittelemämme origon ympäristöt ovat selvästi myös absorboivia, kuten niiden täytyykin. Niiden mittausfunktiot ovat topologian virittävät seminormit. Erityisesti saamamme topologia on lokaalikonveksi. Sillä on myös seuraavat ominaisuudet:

Lause 9.14. (1) *Balansoitu, konveksi joukko $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$ on avoin aina ja vain, kun $A \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ on avoin kaikille*[55] *kompakteille $K \subset \Omega$.*

(2) *τ indusoi aliavaruuksiin $\mathcal{D}_K(\Omega)$ niiden alkuperäisen topologian.*

(3) *Joukko $R \subset \mathcal{D}(\Omega)$ on rajoitettu aina ja vain, kun se sisältyy jo johonkin avaruuksista $D_K(\Omega)$ ja on siellä rajoitettu.*

(4) *Jokainen rajoitettu, suljettu joukko testifunktioavaruudessa $D(\Omega)$ on kompakti. Avaruudella $D(\Omega)$ on on siis* Heinen ja Borelin ominaisuus.

(5) *Testifunktiojono $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono aina ja vain, kun se sisältyy johonkin avaruuksista $D_K(\Omega)$ ja on siellä Cauchy.*

(6) *Testifunktiojono $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti testifunktiota φ aina ja vain, kun se sisältyy johonkin avaruuksista $D_K(\Omega)$ ja suppenee siellä kohti funktiota φ.*

(7) *Testifunktioavaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ on jonotäydellinen.*

(8) *Testifunktioavaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ on metrisoitumaton.*

(9) *Lineaarikuvaus T testifunktioavaruudesta $\mathcal{D}(\Omega)$ johonkin lokaalikonveksiin avaruuteen E — erityisesti lineaarimuoto — on jatkuva aina ja vain, kun sen rajoittumat avaruuksiin $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ovat jatkuvia.*

[55] Tässä samoin kuin sopivin kohdin jatkossakin riittää: kaikille K_i.

(10) *Erityisesti derivaattaoperaattori* $D = \frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ *ja inkluusiokuvaus* $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *ovat jatkuvia.*

(11) *Testifunktioavaruus* $\mathcal{D}(\Omega)$ *on itse asiassa täydellinen*[56].

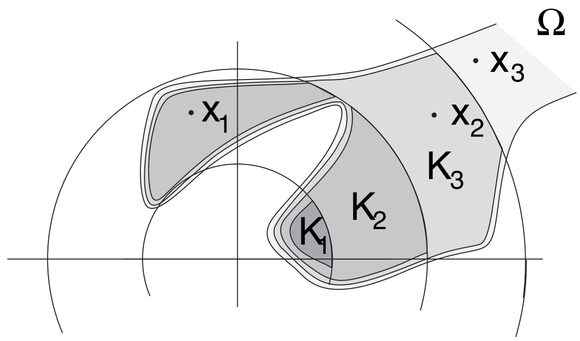
Todistus. Esitämme alla kohdissa 9.15 ja 9.16 yleisen lauseen, josta kaikki tämä seuraa.

Yllä annetussa järjestyksessä todistettuina väitteet ovat toisaalta, viimeistä lukuun ottamatta, melko suoraviivaisia seurauksia määritelmistä, niin että ne voi halutessaan todistaa suoraankin. Todistetaan malliksi suorasta todistamisesta kohdat (3), (8) ja (9).

(3) Aliavaruuden $\mathcal{D}_K(\Omega)$ rajoitetut joukot ovat tietenkin koko avaruudessakin rajoitettuja, joten kohdan (3) varsinainen väite on vain-puoli. Olkoon $R \subset \mathcal{D}(\Omega)$ rajoitettu joukko. Teemme vastaoletuksen, jonka mukaan se ei sisälly mihinkään aliavaruuksista $\mathcal{D}_K(\Omega)$, erityisesti ei mihinkään joukoista $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ On siis kaikille $i \in \mathbb{N}$ olemassa

$$\varphi_i \in R \setminus \mathcal{D}_{K_i}(\Omega),$$

eli tutkittavaan joukkoon kuuluva $\mathcal{C}^\infty$-funktio, jonka kantaja ei sisälly joukkoon K_i. Valitaan kustakin $\Omega \setminus K_i$ piste x_i, jossa $\varphi_j(x_i) \neq 0$.



KUVA 12. Jonon $(x_i)_\mathbb{N}$ konstruktio kaksiulotteisessa avaruudessa

Tehtävänä on keksiä avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$ origon ympäristö, joka ei absorboi joukkoa R. Valitsemme sen niin, että se ei absorboi jonoa $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Sopiva ehdokas on

$$W = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \;\middle|\; \forall\, i \in \mathbb{N}\ |\varphi(x_i)| < \frac{|\varphi_n(x_i)|}{i} \right\}.$$

Selvästikään W ei absorboi jonoa $(\varphi_i)_\mathbb{N}$. On vielä osoitettava, että W on origon ympäristö. Koska W on balansoitu ja konveksi, niin riittää todistaa, että jokainen $W \cap \mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ on origon ympäristö ao. aliavaruudessa $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$. Tämä puolestaan seuraa siitä, että pisteistä x_n vain äärellisen moni kuuluu joukkoon K_i ja evaluaatiofunktionaalien jatkuvuudesta.

[56]Vrt. huomautus 9.9, jossa on eri topologia.

(8): $\mathcal{D}(\Omega)$ on jonotäydellinen. Jos se olisi metrisoituva, se olisi myös täydellinen eikä Bairen lauseen vuoksi voisi olla numeroituva yhdiste suljetuista, sisäpisteettömistä joukoista. Kuitenkin jokainen $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ on päivänselvästi sisäpisteetön ja täydellisenä myös suljettu alivaruus ja

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_i}(\Omega).$$

(9) Jatkuvan kuvauksen rajoittumat aliavaruuksiin ovat aina jatkuvia. Riittää siten todistaa käänteinen puoli. Olettakaamme, että jokainen lineaarikuvauksen $T : \mathcal{D}(\Omega) \to E$ rajoittuma $T_K : \mathcal{D}_K(\Omega) \to E$ on jatkuva. Osoittaaksemme kuvauksen T jatkuvuuden tarkastelemme E:n origon ympäristöä $A \subset E$, jonka voimme olettaa olevan balansoitu ja konveksi. Sen alkukuva $T^{-1}(A)$ on myös balansoitu ja konveksi. Kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$ on

$$T^{-1}(A) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = T_K^{-1}(A),$$

ja sehän on origon ympäristö $\mathcal{D}_K(\Omega)$:ssa. τ-topologian määritelmän 9.11 mukaan $T^{-1}(A)$ on siis origon τ-ympäristö. □

9.3. **Testifunktioavaruus tarkkana induktiivisena limeksenä.**

Huomautus 9.15. Itse asiassa $\mathcal{D}(\Omega)$ on tarkka induktiivinen limes avaruuksista $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$, missä $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ on avoimen joukon Ω tyhjennys.

Seuraavia tarkasteluja varten kerrataan kohdasta 5.22 määritelmä, jonka mukaan, jos $\{T_i : F_i \to E_i \mid i \in I\}$ on perhe lineaarikuvauksia lokaalikonvekseilta avaruuksilta vektoriavaruudelle E, niin E:n lokaalikonveksi induktiivinen limestopologia on hienoin avaruuden E lokaalikonveksi topologia, jossa jokainen T_i on jatkuva ja sen origon ympäristökannaksi kelpaa

$$\mathcal{B}_E = \{U \subset E \mid U \text{ on balansoitu, konveksi, ja absorboiva ja } T_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{E_i}\, \forall\, i \in I\}.$$

Muistetaan lisäksi induktiivisuuslauseesta 5.23 ja lauseesta 5.25, että tässä topologiassa

(i) Avaruuden E seminormi p on jatkuva aina ja vain, kun jokainen $p \circ T_i$ on jatkuva seminormi.
(ii) Lineaarikuvaus T avaruudesta E mihin tahansa lokaalikonveksiin vektoriavaruuteen F on jatkuva aina ja vain, kun jokainen $T \circ T_i$ on jatkuva.
(iii) Tynnyriavaruuksien F_i lokaalikonveksi induktiivinen limes E on tynnyriavaruus ja bornologisten bornologinen.

Erikoistapauksena 5.26 edellisestä on tilanne, jossa $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots$ on jono toistensa suljettuja lokaalikonvekseja Hausdorff-avaruuksia. Yhdistettä $E = \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$ varustettuna inkluusiokuvausten $i_n : E_i \to E$ määräämällä induktiivisella topologialla sanotaan tällöin avaruuksien E_n tarkaksi induktiiviseksi limekseksi $\varinjlim E_n$.

Lause 9.16. *Tarkalla induktiivisella limeksellä $E = \varinjlim E_n$ on seuraavat ominaisuudet*

(i) *Avaruuden E seminormi p on jatkuva, jos ja vain jos sen rajoittuma jokaiseen E_n on jatkuva.*

(ii) *Lineaarikuvaus avaruudesta E lokalikonveksiin avaruuteen F (erityisesti lineaarimuoto) T on jatkuva, jos ja vain jos sen rajoittuma jokaiseen E_n on jatkuva.*

(iii) *Avaruuden E_n alkuperäinen topologia τ_n on sama kuin tarkan induktiivisen limeksen $E = \varinjlim E_n$ topologian τ indusoima aliavaruustopologia τ.*

(iv) *E_n on avaruuden E suljettu aliavaruus.*

(v) *E on Hausdorff-avaruus.*

(vi) *Osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu tasan ollessaan jonkin E_n:n rajoitettu osajoukko.*

(vii) *Jono $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ on suppeneva (tai Cauchy) tasan ollessaan sitä jossain E_n joten E on jonotäydellinen tasan jokaisen E_n ollessa sitä.*

(viii) *E on täydellinen tasan jokaisen E_n ollessa sitä.*

(ix) *Jokainen $E_n \subset E$ on sisäpisteetön. Jos siis jokainen E_n on täydellinen, niin E on metrisoitumaton.*

(x) *Jos jokainen E_n on tynnyriavaruus, niin E on tynnyriavaruus.*

(xi) *Jos jokainen E_n on bornologinen avaruus, niin E on bornologinen avaruus.*

(xii) *Jos jokaisessa E_n jokainen rajoitettu suljettu joukko on kompakti, niin sama pätee avaruudessa E.*

Todistus. (i) E:n seminormin p rajoittuma aliavaruuten E_n on yhdistetty kuvaus $p \circ i_n$. Koska avaruudessa E on injektioiden i_m induktiivinen lokaalikonveksi topologia, niin induktiivisuuslauseen 5.23 mukaan p on jatkuva E:ssä, jos ja vain jos jokainen tällainen yhdistetty kuvaus on jatkuva.

(ii) Lineaarikuvauksen $T : E \to F$ rajoittuma aliavaruuten E_n on yhdistetty kuvaus $T \circ i_n$. Koska E:ssä on injektioiden i_m induktiivinen lokaalikonveksi topologia ja avaruus F on lokaalikonveksi, niin induktiivisuuslauseen 5.23 mukaan T on jatkuva E:ssä, jos ja vain jos jokainen tällainen yhdistetty kuvaus on jatkuva.

(iii) Sen kanssa, että avaruuden E_n alkuperäinen topologia τ_n on sama kuin tarkan induktiivisen limeksen $E = \varinjlim E_n$ topologian τ indusoima aliavaruustopologia τ on yhtäpitävää, että molemmissa on samat jatkuvat seminormit. Olkoon siis avaruuden E_n seminormi p_n jatkuva τ-mielessä eli tarkan induktiivisen limeksen E topologisessa aliavaruudessa E_n. Silloin sillä on lauseen 2.12 mukaan olemassa jatko koko avaruuden E jatkuvaksi seminormiksi p. Tämän rajoittuma eli alkuperäinen p_n on kohdan (i) nojalla τ_n-jatkuva.

Jos taas oletetaan, että avaruudessa E_n annettu seminormi p_n on alkuperäisessä topologiassa τ_n jatkuva, niin se voidaan lauseen 2.12 mukaan jatkaa jatkuvaksi seminormiksi avaruuteen E_{n+1}, onhan $E_n \subset E_{n+1}$ aliavaruus. Tätä voidaan toistaa induktiolla ja näin saadaan määritellyksi seminormi jokaiseen E_m ja siis koko avaruuteen E. Sen rajoittumat ovat tietenkin juuri konstruoidut jatkot. Ne ovat τ_m-jatkuvia, joten koko seminormi on jatkuva kohdan (i) perusteella. Siis alkuperäinen p_n on τ-jatkuvan kuvauksen rajoittumana τ-jatkuva.

(iv) Osoitetaan, että E_n on avaruuden E suljettu aliavaruus. Olkoon $x_0 \in E \setminus E_n$. Silloin on jollakin m voimassa $x_0 \in E_m \setminus E_n$, jolloin, koska E_n on oletuksen mukaan suljettu E_{m+1}:ssa ja siten induktion nojalla myös jokaisessa myöhemmässä E_m, on olemassa avaruuden E_m jatkuva seminormi siten, että $x_0 + B_p \cap E_n = \emptyset$. Totesimme juuri, että p voidaan jatkaa koko avaruuteen E jatkuvaksi seminormiksi p. Tietysti tälle jatkollekin pätee $x_0 + B_p \cap E_n = \emptyset$, joten x_0 on joukon $E \setminus E_n$ sisäpiste.

(v) Osoitetaan, että E on Hausdorff. Olkoon $x \in E$. Sillon $x \in E_n$ jollekin n, ja E_n on oletusten mukaan Hausdorff, joten on olemassa avaruuden E jatkuva seminormi, jolle $p(x) \neq 0$. Tämän jatko koko avaruuteen on jatkuva seminormi, joka saa pisteessä x nollasta poikkeavan arvon.

(vi) Huomautuksen 4.22 mukaan jokainen jatkuva lineaarikuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi, joten jokainen jonkin E_n:n rajoitettu joukko on samalla E:n rajoitettu joukko. Osoitetaan käänteinen väite. Olkoon $A \subset E$ rajoitettu. Jos A ei sisältyisi mihinkään avaruuteen E_n, niin valittaisiin aidosti kasvava lukujono $(n_k)_{\mathbb{N}}$ ja pistejono $(x_k)_{\mathbb{N}}$ siten, että $x_k \in (E_{n_{k+1}} \setminus E_{n_k}) \cap A$. Korollaarin 2.14 mukaan on olemassa jono jatkuvia seminormeja $p_k : E_k \to \mathbb{R}$ siten, että kukin p_k on edellisen jatko ja $\frac{1}{k}x_k$ ei kuulu p_{n_k}:n avoimeen yksikköpalloon. Koska jono $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on aidosti kasvava, niin $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k}$. Kohdassa (iii) esitettiin, miten seminormit p_k muodostavat koko avaruuden jatkuvan seminormin p, jonka rajoittumat avaruuksiin E_{n_k} ovat seminormit p_{n_k}. Sen avoin yksikköpallo on origon ympäristö avaruudessa E.

Koska $x_k \in E_{n_{k+1}}$, niin tietenkin myös $\frac{1}{k}x_k \in E_{n_{k+1}}$. Mutta $\frac{1}{k}x_k$ ei kuulu seminormin $p_{n_{k+1}}$ avoimeen yksikköpalloon, vaan $p_{n_{k+1}}(\frac{1}{k}x_k) \geq 1$. Toisin sanoen $p(\frac{1}{k}x_k) \geq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}^*$. Jono $(\frac{1}{k}x_k)_{\mathbb{N}}$ ei siis suppene nollaan. Mutta koska $(x_k)_{\mathbb{N}} \subset A$ on rajoitettu jono, niin on helppoa todeta, että sittenkin jono $(\frac{1}{k}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee nollaan. Tämä ristiriita todistaa väitteen.

(vii) Edellisistä seuraa heti, että jono $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ on suppeneva (tai Cauchy) tasan ollessaan sitä jossakin E_n.

(viii) Tunnetusti täydellisyys periytyy suljettuun osajoukkoon. Alla todistettavan lauseen 9.21 mukaan täydellisyys periytyy tarkkaan induktiiviseen limekseen.

(ix) Jokainen $E_n \subset E$ on aito aliavaruus, siis sisäpisteetön. E on aliavaruuksiensa E_n numeroituva yhdiste, siis Bairen 1. kategoriaa. Jos siis jokainen E_n on täydellinen, niin E on täydellinen ja kuitenkin Bairen 1. kategoriaa, joten se on Bairen kategorialauseen 4.4 nojalla metrisoitumaton.

(x) Jos jokainen $E_n \subset E$ on tynnyriavaruus, niin E on tynnyriavaruus, koska tämä ominaisuus periytyy lauseen 5.22 nojalla yleiseen lokaalikonveksiin induktiiviseen limekseen.

(xi) Jos jokainen $E_n \subset E$ on bornologinen avaruus, niin E on bornologinen avaruus, koska tämäkin ominaisuus periytyy lauseen 5.22 nojalla yleiseen lokaalikonveksiin induktiiviseen limekseen.

(xii) Olkoon jokaisessa E_n jokainen rajoitettu, suljettu joukko kompakti. Olkoon $A \subset E$ rajoitettu ja suljettu. Osoitetaan, että A on kompakti: Koska A on rajoitettu, niin se sisältyy johonkin avaruuteen E_n ja on sielläkin rajoitettu ja suljettu, siis kompakti.

□

Määritelmä 9.17. Tynnyriavaruus, jolla on Heinen ja Borelin ominaisuus, ts. jossa jokainen suljettu rajoitettu joukko on kompakti, on *Montelin avaruus*.[57]

Huomautus 9.18. Äsken todistetun lauseen 9.16 mukaan Montelin avaruuksien tarkka induktiivinen limes on Montelin avaruus.

Heinen ja Borelin klassinen lause sanoo, että äärellisulotteiset normiavaruudet ovat Montelin avaruuksia. Lauseen 1.32 mukaan ääretönulotteinen normiavaruus ei ole Montelin avaruus.

Määritelmä 9.19. a) Tarkka induktiivinen limes Banachin avaruuksista on *$\mathcal{LB}$-avaruus*.

b) Tarkka induktiivinen limes Frèchet'n avaruuksista on *$\mathcal{LF}$-avaruus*.

Huomautus 9.20. Erityisesti jokainen $\mathcal{LB}$-avaruus on $\mathcal{LF}$-avaruus. Jokainen $\mathcal{LF}$-avaruus puolestaan on lauseen 9.16 mukaan bornologinen, täydellinen, mutta ei koskaan metrisoituva.

Lause 9.21. (Köthen lause) *Täydellisten avaruuksien tarkka induktiivinen limes $\varinjlim E_n$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}$ Cauchy-filtteri avaruudessa E. Joukkoperhe

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{F} + \mathcal{U}_0 = \{M + V \bigm| M \in \mathcal{F},\, V \in \mathcal{U}_0\}$$

on filtterikanta avaruudessa E. Sen virittämä filtteri $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri. Olkoon nimittäin $U \in \mathcal{U}_E$. Valitaan balansoitu $V \in \mathcal{U}_E$, jolla $V + V + V \subset U$. Koska $\mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri, on olemassa $M \in \mathcal{F}$, jolla $M - M \subset V$. Nyt

$$(M + V) - (M + V) = (M - M) + (V - V) \subset V + V + V \subset U.$$

Osoitetaan, että filtterin $\mathcal{G}$ jälki $\{A \cap E_n \bigm| A \in \mathcal{G}\}$ jossain aliavaruudessa E_n on filtteri eli, että jokainen $A \in \mathcal{G}$ leikkaa samaa aliavaruutta E_n Tämä on vaikein työvaihe. (Todistuksen lopuksi on nimittäin suoraviivaista osoittaa, että on saatu Cauchy-filtteri avaruudessa E_n. Se suppenee ja raja-arvo on $\mathcal{G}$:n ja sitä myötä myös $\mathcal{F}$:n raja-arvo.)

Pitää todistaa, että jokin E_n leikkaa jokaista $A \in \mathcal{G}$. Tehdään antiteesi, että mikään E_n ei leikkaa jokaista $A \in \mathcal{G}$, vaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa avaruutta E_n leikkaamaton $A_n \in \mathcal{G}$. Erityisesti on olemassa tällainen filtterikantajoukko $A_n \in \mathcal{G}_0 = \mathcal{F} + \mathcal{U}_0$, eli kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $M_n \in \mathcal{F}$ ja $V_n \in \mathcal{U}_E$ siten, että $(M_n + V_n) \cap E_n = \emptyset$, ja voi tietenkin vielä vaatia, että V_n on tynnyri ja $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$.

Seuraavaksi osoitetaan, että kaikki ympäristöt V_n voi korvata yhdellä ja samalla ympäristöllä $Y \in \mathcal{U}_E$. Valitaan $Y = \mathrm{co}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}(V_n \cap E_n))$. Ainakin $Y \in \mathcal{U}_E$, sillä on ilmeistä, että Y on konveksi, balansoitu ja absorboiva ja lisäksi kaikilla n on $Y \cap E_n \in \mathcal{U}_{E_n}$, mikä takaa, että Y on tarkan induktiivisen limeksen origon ympäristö.

- Näytetään, että kaikilla n on $(M_n + Y) \cap E_n = \emptyset$. Teemme tämänkin epäsuorasti: (Huomaa, että edellinen epäsuora todistuskin on vielä kesken). Vastaoletus: $\exists n \in \mathbb{N} : \ (M_n + Y) \cap E_n \neq \emptyset$ eli on olemassa $y \in (M_n + Y) \cap E_n$.

[57] Paul Antoine Aristide Montel 1876–1975, Ranska.

Tämä merkitsee, että jollain n on olemassa $y \in E_n$, jolla

$$y = z_n + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k,$$

missä

$$\begin{aligned} &z_n \in M_n, \\ &x_k \in E_k \cap V_k \\ &\lambda_k \geq 0 \text{ ja } \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1. \end{aligned}$$

Jos $r \leq n$, niin summassa $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ jokainen x_k kuuluu avaruuteen E_n, onhan $E_k \subset E_n$ kaikilla $k \leq n$. Tällöin $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k \in E_n$, joten, koska tietenkin $M_n \subset M_n + V_n$,

$$z = y - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k \in E_n \cap M_n \subset E_n \cap (M_n + V_n) = \emptyset,$$

ja ristiriita on saatu.

Jos $r > n$, niin jaetaan summa $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ osiin:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k x_k$$

Totesimme juuri, että ensimmäinen osa kuuluu avaruuteen E_n, koska $x_k \in E_k \subset E_n$, kun $k \leq n$. Jälkimmäisessä summassa taas $x_k \in V_k \subset V_n$, koska $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. Koska summassa kertoimet λ_k ovat positiivisia ja yhteensä enintään 1, niin siis jälkimmäinen summa kuuluu konveksiin joukkoon V_n. Siis

$$y - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = z_n + \sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k x_k \ \in (M_n + V_n) \cap E_n = \emptyset.$$

Ristiriita osoittaa, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $(M_n + Y) \cap E_n = \emptyset$.

Oletuksen mukaan $\mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri. Koska Y on origon ympäristö, on olemassa $M \in \mathcal{F}$, jolla $M - M \subset Y$. Olkoon $x \in M$. Koska tietenkin $x \in E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $x \in E_n$. Siis $x \in E_n \cap M$. Koska M ja M_n kuuluvat filtteriin $\mathcal{F}$, on $M \cap M_n \neq \emptyset$ eli on olemassa $y' \in M \cap M_n$. Nyt

$$x = y' + (x - y') \in y' + (M - M) \subset y' + Y \subset M_n + Y.$$

Mutta n on valittu siten, että $x \in E_n$. Siis $x \in E_n \cap (M_n + Y) = \emptyset$, mikä on mahdotonta.

Näin saatu ristiriita osoittaa, että $\mathcal{G}_n = \{A \cap E_n \mid A \in \mathcal{G}\}$ on filtteri avaruudessa E_n. Se on tietenkin Cauchy: Jos näet $U_n \in \mathcal{U}_{E_n}$, niin on olemassa $U \in \mathcal{U}_E$, jolla $U_n = U \cap E_n$, ja koska $\mathcal{G}$ on Cauchy, on edelleen olemassa $A \in \mathcal{G}$ siten, että $A - A \subset U$, jolloin $(A \cap E_n) - (A \cap E_n) \subset U \cap E_n = U_n$.

Koska oletettiin, että E_n on täydellinen, niin $\mathcal{G}_n$ suppenee kohti jotain pistettä $x_0 \in E_n$. Tämä tarkoittaa, että jokaisella pisteen x_0 ympäristöllä avaruudessa E_n on filtteriin $\mathcal{G}_n$ kuuluva osajoukko.

Osoitetaan lopuksi, että $\mathcal{F} \to x_0$. Koska $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, niin riittää todistaa, että $\mathcal{G} \to x_0$. Olkoon $U \in \mathcal{U}_E$. Pitää löytää $A \in \mathcal{G}$, jolla $A \subset x_0 + U$. Valitaan balansoitu $V \subset U_E$, jolla $V + V \subset U$ ja $A \in \mathcal{G}$, jolla $A - A \subset V$. Koska $\mathcal{G}_n \to x_0$, on olemassa $B \in \mathcal{G}$, jolla $B \cap E_n \subset x_0 + (V \cap E_n)$. Nyt $A \cap B \in \mathcal{G}$, joten $A \cap B \cap E_n \neq \emptyset$ ja siis myös $A \cap (x_0 + V) \neq \emptyset$. Olkoon $x \in A$ ja $y \in A \cap (x_0 + V)$. Silloin $x - x_0 = x - y + y - x_0 \in A - A + V \subset V + V \subset U$. Siis $A \subset x_0 + U$, joten on näytetty, että $\mathcal{G} \to x_0$. □

9.4. **Lineaarikuvauksen jatkuvuuskriteeri testifunktioavaruudessa.**

Huomautus 9.22. Lauseen 6.15 mukaan rajoitettu lineaarikuvaus metrisoituvalta lokaalikonveksilta avaruudelta lokaalikonveksille avaruudelle on aina jatkuva. Seuraava lause parantaa tätä tulosta vielä vähän:

Lause 9.23. *Olkoon E metrisoituva, lokaalikonveksi ja F topologinen vektoriavaruus sekä $T : E \to F$ lineaarikuvaus, joka kuvaa kaikki origoa kohti suppenevat jonot rajoitetuiksi joukoiksi. Tällöin T on jatkuva.*

Todistus. Kuvaus mistä tahansa metrisestä avaruudesta topologiseen avaruuteen on jatkuva aina ollessaan jonojatkuva. Lineaarikuvauksen tapauksessa tälle on riittävää jonojatkuvuus origossa. Todistamme, että huomautuksen ehto implikoi kuvauksen T jonojatkuvuuden origossa. Olkoon siis $x_n \to 0$ metrisoituvassa lokaalikonveksissa avaruudessa E. On mahdollista konstruoida jono positiivilukuja c_n siten, että

$$\begin{aligned} & c_n \to \infty \\ \text{ja} \qquad & c_n x_n \to 0. \end{aligned}$$

Sellaiseksi käy esimerkiksi

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d(x_n,0)}}, \text{ kun } x_n \neq 0 \\ n, \text{ kun } x_n = 0, \end{cases}$$

missä d on lauseen 4.5 todistamiseen käyttämämme metriikka

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \tfrac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)},$$

onhan selvästi $c_n \to \infty$, jolloin suurilla n pätee $c_n > 1$ ja siis myös $d(c_n x_n, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(c_n x_n)}{1+p_k(c_n x_n)} = c_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n)}{1+c_n p_k(x_n)} \leq c_n d(x_n, 0) \leq \sqrt{d(x_n,0)} \to 0$. Huomautuksen ehdosta kuvaukselle T seuraa, että jono $(c_n x_n)_{\mathbb{N}}$ kuvautuu rajoitetuksi jonoksi $c_n T x_n \subset F$. On lopuksi helppo harjoitustehtävä (0.0.85) todeta, että normiavaruuksien tapauksesta tutulla tavalla myös topologisessa vektoriavaruudessa nollaan suppenevan lukujonon c_n^{-1} ja rajoitetun jonon $(c_n T x_n)_{\mathbb{N}}$ tulojono $(T x_n)_{\mathbb{N}}$ suppenee origoon. □

Seuraus 9.24. *Lineaarikuvaus $T : \mathcal{D}(\Omega) \to E$, missä E on lokaalikonveksi avaruus, on jatkuva aina ja vain, kun se toteuttaa seuravat keskenään yhtäpitävät ehdot:*

a) *T on rajoitettu.*

b) $\varphi_i \to 0 \implies \{T\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *on rajoitettu jono.*

c) T *on* jonojatkuva origossa*, ts.* $\varphi_i \to 0 \implies T\varphi_i \to 0$.

Todistus. Olkoon aluksi $T : \mathcal{D}(\Omega) \to E$ rajoitettu. Silloin T kuvaa erityisesti aliavaruuden $\mathcal{D}_K(\Omega)$ rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi ja on siis edellisen huomautuksen 9.23 nojalla jatkuva $\mathcal{D}_K(\Omega)$:ssa ja — koska E on lokaalikonveksi — lauseen 9.14 mukaan myös koko avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$.

Samalla tavalla voi päätellä, että (b) ja (c) kumpikin erikseen takaavat jatkuvuuden aliavaruuksissa $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ja siis koko avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

10. Distribuutiot ja mitat

10.1. **Distribuutio ja sen aste.**

Määritelmä 10.1. *Distribuutioiden avaruus* $\mathcal{D}(\Omega)^*$ on testifunktioavaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ topologinen duaali. Sen alkioita sanotaan *(Schwartzin) distribuutioiksi* joukossa Ω.

Huomautus 10.2. Testifunktioavaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$ on käytössä induktiivisen limeksen τ-topologia. Luvun 9 tarkasteluista 9.16 ja 9.24 seuraa, että lineaarimuoto

$$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

on distribuutio aina ja vain, kun jokainen rajoittuma $\Lambda\big|_K : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathbb{R}$ on jatkuva eli kun jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ — tai yhtä lailla jokaista tyhjennykseen valittua kompaktia $K_j \subset \Omega$ — kohti on olemassa luvut $C > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ pätee:

$$|\langle \varphi, \Lambda\rangle| \le C\|\varphi\|_n \text{ tai yhtälailla} \tag{10.1}$$

$$|\langle \varphi, \Lambda\rangle| \le Cp_n(\varphi), \text{ missä} \tag{10.2}$$

normit $\|\cdot\|_n$ ja p_n ovat huomautuksessa 9.10 määrittelemämme derivaattojen kompaktin konvergenssin normit avaruudessa $\mathcal{D}_K(\Omega)$:

$$\|\varphi\|_n = \|D^n\varphi\|_\infty \text{ ja}$$
$$p_n(\varphi) = \max\{|D^k\varphi(x)| \mid k \le n,\, x \in K\} = \max_{k\le n} \|\varphi\|_n$$

Tämä versio distribuution määritelmästä esitetään "suoraan asiaan"-tyyppisissä kirjoissa usein enemmittä selityksittä. Tiivistämme distribuution määritelmän: Lineaarimuoto $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ on Schwartzin distribuutio, jos

$$\forall K_j\, \exists C > 0\; \exists n \in \mathbb{N}\, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{K_j}(\Omega) : \; |\langle \varphi, \Lambda\rangle| \le C\|D^n\varphi\|_\infty \tag{10.3}$$

Huomautus 10.3. Lineaarimuoto $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ on siis 9.24 mukaan distribuutio tasan ollessaan jonojatkuva, mikä tapahtuu, jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa:

Jos $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jono testifunktioavaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$ ja on olemassa kompakti $K \subset \Omega$, jolla $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja lisäksi kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$D^n\varphi_k(x) \to 0 \text{ tasaisesti } K\text{:ssa},$$

niin $\langle \varphi_k, \Lambda\rangle \to 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.90.

Määritelmä 10.4. Sanomme, että distribuutio Λ on *äärellisasteinen*, mikäli 10.3 toteutuu kaikille K_j samalla n. Pienin tällainen n on tällöin Λ:n *aste*. Muuten Λ:n aste on ∞.

Esimerkki 10.5. Seuraavat ovat esimerkkejä distribuutioista:
a) Evaluaatiofunktionaalit eli *Diracin δ-mitat*[58],

$$\langle \varphi, \delta_x \rangle = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

ovat asteen 0 distribuutioita.

b) Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *lokaalisti integroituva*, eli kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$:

$$\int_K |f| < \infty.$$

Tällöin f määrittelee asteen 0 distribuution Λ_f kaavalla

$$\langle \varphi, \Lambda_f \rangle = \int_\Omega f\varphi,$$

sillä kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ on

$$|\langle \varphi, \Lambda_f \rangle| \leq p_0(\varphi) \int_K |f|.$$

On tapana samaistaa distribuutio Λ_f funktioon f ja sanoa sitä *säännölliseksi distribuutioksi*. Tämä on motivoitua, koska kaksi säännöllistä distribuutiota yhtyvät aina ja vain, kun vastaavat funktiot yhtyvät melkein kaikkialla (harjoitustehtävä 0.0.89.).

c) Joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokaalisti integroituvalle funktiolle määritellään *Cauchyn pääarvo*[59] integraalille.

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f + \int_{\varepsilon}^{\infty} f \right),$$

jos tämä on olemassa.

Distribuution Λ_f Cauchyn pääaarvo $v.p.f$ tarkoittaa lineaarimuotoa

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \varphi, v.p.f \rangle = v.p \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi,$$

jos tämä on olemassa ja jatkuva. Klassinen esimerkki on $v.p.\frac{1}{x}$. Osoitamme, että se on distribuutio.

[58]Paul Adrien Maurice Dirac 1902–1984, brittiläinen kvanttifysiikan kehittäjä.
[59]Merkintä v.p. on lyhenne sanoista value principale.

Osoitetaan ensin, että pääarvo on olemassa. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Valitaan n siten, että $\operatorname{supp}\varphi \subset]-n, n[$.

$$
\begin{aligned}
&v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\tfrac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-n}^{-\varepsilon} \varphi(x)\tfrac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{n} \varphi(x)\tfrac{1}{x}\,dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-n}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)+\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{n} \frac{\varphi(0)+\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\varphi(0)\big(\int_{-n}^{-\varepsilon} \tfrac{1}{x} + \int_{\varepsilon}^{n} \tfrac{1}{x} \big) + \int_{-n}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{n} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \right) \\
&= \varphi(0)\cdot 0 + \int_{-n}^{n} g,
\end{aligned}
$$

missä g on (n:n valinnasta riippumaton) kompaktikantajainen jatkuva funktio

$$
g(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ D\varphi(0), & \text{kun } x = 0. \end{cases}
$$

Tietenkin $v.p.\frac{1}{x}$ on lineaarimuoto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:ssä. Verifioidaan sen jatkuvuus. Lauseen 9.24 mukaan riittää todeta jonojatkuvuus. Oletetaan $\varphi_n \to 0$ avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Lauseen 9.16 mukaan on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\varphi_n \in \mathcal{D}([-m, m])$ kaikilla n, jolloin edellisen päättelyn mukaisesti

$$
|\langle v.p.\tfrac{1}{x}, \varphi_n \rangle| = \int_{-m}^{m} g \le 2m\|g\|_\infty
$$

ja väliarvolauseen nojalla

$$
|g(x)| \le m\|D\varphi_n\|,
$$

joten $|\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle| \to 0$, kun $n \to \infty$.

d) Kuten lokaali-integroituva funktio myös yleisempi Ω:n mitta μ, jolle $0 \le \mu(K) < \infty$ kompakteille $K \subset \Omega$, voidaan samaistaa määrittelemäänsä asteen 0 distribuution Λ_μ:

$$
\langle \varphi, \Lambda_\mu \rangle = \int_\Omega f\,d\mu.
$$

Tarkastelemme tätä esimerkkiä lähemmin kohdassa 10.20.

10.2. **Distribuution derivaatta.**

Määritelmä 10.6. Distribuution $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *derivaatta* $D\Lambda$ on distribuutio $-\Lambda \circ D$, ts.

$$
\langle \varphi, D\Lambda \rangle = -\langle D\varphi, \Lambda \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).
$$

$D\Lambda$ on tietenkin distribuutio eli jatkuva lineaarimuoto testifunktioavaruudessa, ovathan D ja Λ jatkuvia lineaarikuvauksia. Suoraan laskien saamme hieman lisää tietoa:

$$
\begin{aligned}
&\text{Jos } |\langle \varphi, \Lambda \rangle| \le C\|\varphi\|_n \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \\
&\text{niin } |\langle \varphi, D\Lambda \rangle| \le C\|D\varphi\|_n \le C\|\varphi\|_{n+1} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

mistä samalla näkyy, että derivaatta $D\Lambda$ on enintään yhdellä korkeampaa astetta kuin Λ. Derivoimalla Diracin δ-mitan voi todeta, että aste saattaa todella nousta aidosti.

Koska distribuution derivaatta on aina olemassa ja distribuutio, on samalla määritelty korkeammat derivaatat. Distribuutiolla on siis ne kaikki. Huomaa, että merkki vaihtuu jokaisessa derivoinnissa, joten esimerkiksi $\langle \varphi, D^2\Lambda\rangle = \langle D^2\varphi, \Lambda\rangle$ ja useampiulotteisessa tilanteessa esimerkiksi Laplace-operaattorin tai derivaatan $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ distribuutioversion lausekkeessa ei esiinny miinus-merkkiä.

Huomautus 10.7. Jos Λ on tavallisessa mielessä melkein kaikkialla derivoituva funktio, on derivaatalle tullut annettua kaksi eri määritelmää. Määritelmät voivat todella antaa eri tuloksen; esimerkin antaa *Heavisiden*[60] *porrasfunktio* $f(x) = 0$, kun $x < 0, f(x) = 1$ muuten. Sen derivaatta tavallisessa mielessä on mk. 0, mutta distribuutiomielessä sen derivaatta on δ_0.

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.92. □

Määritelmämme on kuitenkin asetettu hyvin, sillä pätee seuraava lause, joka samalla motivoi määritelmän:

Lause 10.8. *Lause 8.6 Jos $f : \Omega \to \mathbb{K}$ on derivoituva ja Df on jatkuva Ω:ssa, niin*

$$D\Lambda_f = \Lambda_{Df}.$$

Todistus. Jos f on jatkuvasti derivoituva, niin pätee osittaisintegroinnin kaava

$$\int Df\varphi = -\int fD\varphi,$$

missä pois jätetty sijoitustermi on 0, koska integroitava on kompaktikantajainen. □

Distribuutioiden derivointi on merkkiä vaille sama asia kuin testifunktioiden derivointioperaattorin transpoosi. Määrittelemme seuraavaksi tämän käsitteen ja selvittelemme hieman lineaarikuvauksen transpoosin — siis mm. distribuutioderivoinnin — jatkuvuutta dualiteetin (E, E^*) eri topologioissa.

Määritelmä 10.9. Lineaarikuvauksen $T : E \to F$ *(algebrallinen) transpoosi* eli *(algebrallinen) duaalikuvaus* on lineaarikuvaus

$$T' : F' \to E' : y' \mapsto y' \circ T.$$

Toisin sanoen

$$\langle T'y', x\rangle = \langle y', Tx\rangle$$

kaikille $y' \in F'$ ja $x \in E$.

Jatkuvan lineaarikuvauksen $T : E \to F$ *(topologinen) transpoosi* eli *(topologinen) duaalikuvaus* on lineaarikuvaus

$$T^* : F^* \to E^* : y^* \mapsto y^* \circ T.$$

Toisin sanoen

$$\langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle$$

kaikille $y^* \in F^*$ ja $x \in E$.

[60]Oliver Heaviside 1850–1925, Englanti.

On syytä huomauttaa, että määritelmän ehdoin $T'y'$ eli $y' \circ T$ todella on lineaarikuvaus ja T^*y^* eli $y^* \circ T$ on jatkuvakin, ja lisäksi kuvaus $L(E,F) \to L(F',E') : T \mapsto T'$ on lineaarinen, samoin $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*) : T \mapsto T^*$.

Osoittautuu lisäksi, että jatkuvan lineaarikuvauksen transpoosi on jatkuva mm. avaruuksien F^* ja E^* heikkojen topologioiden mielessä. Todistamme pienen lemman:

Lemma 10.10. *Olkoot E ja F topologisia vektoriavaruuksia ja olkoot niiden topologiset duaalit E^* ja F^* varustetut polaaritopologioilla perheiden $\mathfrak{S}_E$ ja $\mathfrak{S}_F$ suhteen, joilla kummallakin olkoon ominaisuudet:*

(i) *Kaikilla $A, B \in \mathfrak{S}$ on olemassa $C \in \mathfrak{S}$ siten, että $A \cup B \subset C$ ja*
(ii) *Kaikilla $A \in \mathfrak{S}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ on olemassa $B \in \mathfrak{S}$ siten, että $\lambda A \subset B$,*

jolloin 7.38 mukaan $\{A^\circ \mid A \in \mathfrak{S}\}$ on $\mathfrak{S}$-topologian kanta.

Riittävää jatkuvan lineaarikuvauksen $T : E \to F$ transpoosin $T^* : F^* \to E^*$ jatkuvuudelle on, että

$$\forall\, A \in \mathfrak{S}_E \exists\, B \in \mathfrak{S}_F \text{ siten, että } T(A) \subset B.$$

Todistus. Olkoon $A \in \mathfrak{S}_E$ ja $B \in \mathfrak{S}_F$ siten, että $T(A) \subset B$. Tällöin

$$|\langle Tx, y^*\rangle| \le 1 \iff |\langle x, T^*y^*\rangle| \le 1,$$

joten $y^* \in B^\circ \implies T^*y^* \in A^\circ$. □

Seuraus 10.11. *Jatkuvan lineaarikuvauksen $T : E \to F$ transpoosi on jatkuva mm. kuvauksena $F^*_{\sigma(F^*,F)} \to E^*_{\sigma(E^*,E)}$, $F^*_{b(F^*,F)} \to E^*_{b(E^*,E)}$ ja $F^*_{c(F^*,F)} \to E^*_{c(E^*,E)}$ eli heikossa, vahvassa ja kompaktin konvergenssin topologiassa.*

10.3. **Distribuutioavaruuden topologia.**

Määritelmä 10.12. Koska distribuutioiden avaruus $\mathcal{D}(\Omega)^*$ on testifunktioavaruuden topologinen duaali, siihen voi määritellä polaaritopologiat. Useimmiten on tapana käyttää *heikkoa topologiaa $w^* = \sigma(\mathcal{D}(\Omega)^*, \mathcal{D}(\Omega))$. Näin teemme mekin.*

Erityisesti distribuutiojonon konvergenssi tarkoittaa nyt:

$$\Lambda_n \to \Lambda \iff \langle \varphi, \Lambda_n\rangle \to \langle \varphi, \Lambda\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Jatkuvan lineaarikuvauksen transpoosina distribuutioiden derivointi on seurauksen 10.11 mukaan mm. topologiassa $\sigma(E^*, E)$ jatkuva lineaarikuvaus.

10.4. **Radon-mitat distribuutioina.**

Esimerkki 10.13 (Yleiset Radon-mitat). Kun X on lokaalikompakti Hausdorff-avaruus — esimerkiksi avoin joukko $X \subset \mathbb{R}^n$ — merkitään $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f$ on jatkuva$\}$ ja $\mathcal{C}_c(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f$ on kompaktikantajainen$\}$. Kompakteilla $K \subset X$ merkitään $\mathcal{C}_K(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$. Sup-normi $\|\cdot\|_\infty$ tekee avaruudesta $\mathcal{C}_c(X)$ Banach-avaruuden ja avaruuksista $\mathcal{C}_K(X)$ sen suljettuja aliavaruuksia.

Koska

$$\mathcal{C}_c(X) = \bigcup_{K \overset{komp}{\subset} X} C_K(X),$$

niin $\mathcal{C}_c(X)$ voidaan varustaa lokaalikonveksin induktiivisen limeksen topologialla τ inkluusiokuvausten $\mathcal{C}_K(X) \to \mathcal{C}_c(X)$ suhteen. Näin tehdään aina, kun ei toisin mainita.

Radon-mitta[61] on jatkuva lineaarimuoto $\mathcal{C}_c(X)_\tau \to \mathbb{K}$ eli topologisen duaalin ${\mathcal{C}_c(X)_\tau}^*$ alkio. Jos lisäksi $\mu(f) \geq 0$ kaikilla positiivisilla $f \in \mathcal{C}_c(X)$, niin μ on *positiivinen Radon-mitta*.

Lineaarimuoto $\mu \in \mathcal{C}_c(X)'$ on lauseen 9.16 mukaan Radon-mitta tasan silloin, kun se on sup-normin mielessä jatkuva jokaisessa aliavaruudessa $\mathcal{C}_K(X)$ eli kun kaikilla kompakteilla $K \subset X$ on olemassa $C_K > 0$ siten, että kaikille $f \in \mathcal{C}_K(X)$ on

$$|\langle f, \mu\rangle| \leq C_K \|f\|_\infty.$$

Esimerkki 10.14 (Radon-mitat ja tarkka induktiivinen limes). Jos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on lokaalikompaktin avaruuden X tyhjennys kompaktien joukkojen kasvavalla jonolla, niin $\mathcal{C}_c(X)_\tau$ on avaruuksien $\mathcal{C}_{K_n}(X)$ tarkka induktiivinen limes $\varinjlim \mathcal{C}_{K_n}(X)$.

Perustelu. Jokainen kompakti joukko $K \subset X$ sisältyy johonkin joukoista K_n, jolloin Banach-avaruus $\mathcal{C}_K(X)$ on avaruuden $\mathcal{C}_{K_n}(X)$ suljettu topologinen ja lineaarinen aliavaruus. On siis ilmeistä, että edellä määritelty avaruuden $\mathcal{C}_c(X)$ lokaalikonveksi induktiivinen topologia τ on sama kuin tarkan induktiivisen limeksen $\varinjlim \mathcal{C}_{K_n}$ topologia. Tässä tilanteessa lineaarimuoto $\mu \in \mathcal{C}_c(X)'$ on Radon-mitta tasan silloin, kun se on sup-normin mielessä jatkuva jokaisessa aliavaruudessa $\mathcal{C}_{K_n}(X)$ eli kun

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, \lambda_n > 0 \text{ siten, että } |\langle \varphi, \mu\rangle| \leq \lambda_n \|\varphi\|_\infty \text{ kaikilla } \varphi \in \mathcal{C}_{K_n}(X).$$

Rajoitettuja joukkoja avaruudessa $\mathcal{C}_c(X)_\tau$ ovat nyt sellaiset, jotka sisältyvät johonkin $\mathcal{C}_{K_n}(X)$ ja ovat siellä rajoitettuja, siis

$$A = \{\varphi \in \mathcal{C}_c(X) \bigm| \exists n \in \mathbb{N} \text{ siten, että } \operatorname{supp}\varphi \subset K_n \text{ ja } \|\varphi\|_\infty \leq n\}.$$

Esimerkki 10.15. (Lebesguen mitta) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $\mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{K}$: $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi$ on positiivinen Radon-mitta, jota tässä yhteydessä sanomme *Lebesguen mitaksi* dx.

Perustelu. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ on

$$|\langle \varphi,\, dx\rangle| = |\int_\Omega \varphi\, dx| = |\int_{K_n} \varphi\, dx| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{K_n} 1\, dx.$$

Huomautus 10.16. (Mittateoriaa)

a) Avoimessa joukossa $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ positiivinen lineaarimuoto $\mu \in \mathcal{C}_c(\Omega)'$ on aina jatkuva, siis Radon-mitta.

Perustelu. Osoitetaan, että positiivinen lineaarimuoto μ on jatkuva jokaisessa avaruudessa $\mathcal{C}_K(\Omega)$. Valitaan jatkuva ei-negatiivinen kompaktikantajainen funktio $\psi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ siten, että $\psi(x) = 1$ kaikilla $x \in K$. (Sellainen on olemassa!) Kaikilla $\varphi \in$

[61] Johann Karl August Radon 1887–1956, Itävalta.

$\mathcal{C}_K(\Omega)$ on μ:n positiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}|\langle\varphi,\mu\rangle| &\le \langle|\varphi|,\mu\rangle = \langle|\varphi|\psi,\mu\rangle\\ &\le \langle\sup_{x\in K}|\varphi(x)|\psi,\mu\rangle\\ &= \langle\psi,\mu\rangle\sup_{x\in K}|\varphi(x)|.\end{aligned}$$

b) Pätee *Rieszin esityslause*[62] , jonka mukaan jokainen Radon-mitta $\mu \in \mathcal{C}_c(\Omega)^*$ voidaan esittää muodossa

$$\langle\varphi,\mu\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\bar{\mu},$$

missä $\bar{\mu}$ on säännöllinen Borel-mitta[63] joukossa Ω.

Esimerkki 10.17. (Funktio Radon-mittana) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : \Omega \to \mathbb{K}$ lokaalisti integroituva, ts. jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset \Omega$ on $\left|\int_K f\right| < \infty$. Tällöin $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi f$ on Radon-mitta. Funktiota f vastaava Radon-mitta on positiivinen, jos ja vain jos $f \ge 0$ mk.

Perustelu. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ on

$$|\langle\varphi,f\rangle| = \Big|\int_\Omega \varphi f\Big| = \int_{K_n}\varphi f \le \|\varphi\|_\infty\Big|\int_{K_n} f\Big|.$$

Esimerkki 10.18. (Diracin δ Radon-mittana) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $x \in \Omega$. Evaluaatiofunktionaalia $\delta_x : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{K} : \delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ sanotaan tässä yhteydessä *Diracin δ-mitaksi* pisteessä x. Selvästi tämäkin on positiivinen Radon-mitta.

Lause 10.19. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ avoin.*

a) *Radon-mitan $\mu \in \mathcal{C}_c(\omega)_\tau{}^*$ rajoittuma avaruuteen $\mathcal{D}(\Omega)$ on distribuutio.*
b) *Kahden eri Radon-mitan $\mu \in \mathcal{C}_c(\omega)_\tau{}^*$ rajoittumat avaruuteen $\mathcal{D}(\Omega)$ ovat eri distribuutiot.*

Todistus. (a) seuraa siitä, että avaruuden $\mathcal{C}_c(\Omega)$ aliavaruuteensa $\mathcal{D}(\Omega)$ indusoima topologia on karkampi kuin testifunktioavaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ oma topologia, koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset \mathcal{C}(K)$ ja inkluusio on jatkuva.

(b) seuraa siitä, että $\mathcal{D}(\Omega)$ on huomautuksen 9.8 mukaan tiheä avaruudessa $\mathcal{C}_c(\Omega)_\tau$.

Huomautus 10.20. Voimme samaistaa Radon-mitat määrittelemiinsä distribuutioihin. Radon-mitat ovat siis erikoistapaus distribuutioista ja lokaalisti integroituvat funktiot erikoistapaus Radon-mitoista. On selvää, että Radon-mitat ovat 0-asteisia distribuutioita.

[62] Frigyes Riesz 1880–1956, Unkari.

[63] Borel-mitta on Borel-joukkojen σ-algebrassa määritelty mitta. Säännöllisyys tarkoittaa, että $\forall K \overset{\text{komp}}{\subset} \Omega\, \forall\varepsilon > 0\, \exists V \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega$ siten, että $\bar{V}$ on kompakti, $K \subset V$ ja $\forall W \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega$, joilla $K \subset W \subset V$, on $|\mu(W) - \mu(K)| < \varepsilon$. Metrisessä avaruudessa kaikki Borel-mitat ovat säännöllisiä.

10.5. **Distribuution ja funktion tulo.**

Määritelmä 10.21. Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ ja $g \in \mathcal{C}^\infty$. Tällöin *tulo* $g\Lambda$ määritellään distribuutioksi

$$\langle \varphi, g\Lambda \rangle = \langle g\varphi, \Lambda \rangle$$

Perusteluja. On tarkistettava kaksi asiaa. Ensinnäkään määritelmä ei saisi olla ristiriidassa tavallisen tulon kanssa silloin, kun $\Lambda = \Lambda_f$ on funktio 10.5 (b):n mielessä. Tämä onkin kunnossa ja motivoi samalla määritelmämme, onhan

$$\langle \varphi, \Lambda_{gf} \rangle = \int_\Omega gf\varphi = \langle g\varphi, \Lambda_f \rangle.$$

Toinen tarkistettava asia on, että $f\Lambda$ on todella distribuutio, kuten muitta mutkitta väitimme. Selvästi kyseessä on lineaarikuvaus, joten tarkastettavaksi jää vain jatkuvuus. Tämä puolestaan todetaan testillä 10.2: Olkoon siis $K \subset \Omega$ kompakti.

$$\begin{aligned}
&\text{Oletamme: } \exists C, n : \ |\langle \varphi, \Lambda \rangle| \le C\|\varphi\|_n \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\\
&\text{Väitämme: } \exists C', n' : \ |\langle g\varphi, \Lambda \rangle| \le C'\|\varphi\|_{n'} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\\
&\text{Laskemme: } |\langle g\varphi, \Lambda \rangle| \le C\|g\varphi\|_n = C \max\left\{ |D^k(g\varphi)| \;\middle|\; k \le n,\ x \in \Omega \right\}\\
&\qquad \le C \max\left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left|(D^j g)(D^{k-j}\varphi)\right| \;\middle|\; \dots \right\}\\
&\qquad \le C \max\left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left|(D^j g)\right| \;\middle|\; \dots \right\} \max\left\{ |D^{k-j}\varphi| \;\middle|\; \dots \right\}\\
&\qquad = C'\|\varphi\|_n,
\end{aligned}$$

missä

$$C' = C \max\left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left|(D^j g)\right| \;\middle|\; k \le n,\ x \in \Omega \right\}$$

□

Huomautus 10.22. a) Distribuutioiden kertominen funktiolla on tietenkin transpoosi testifunktioiden kertomiselle funktiolla — ja sen toimituksen jatkuvuuden äskeinen todistus itse asiassa verifioi!

b) Edellisen todistuksen olennainen kohta oli *tulon derivoimiskaava* eli binomikertoimia sisältävä *Leibnitzin kaava*[64] korkeamman kertaluvun derivaatoille.

Huomautus 10.23. a) Suoraan laskemalla huomaa, että $D(f\Lambda) = Df\,\Lambda + f\,D\Lambda$, joten Leibnitzin kaava pätee myös distribuution ja funktion tulon derivoinnille.

b) Leibnitzin kaava pätee sopivin kertoimin myös usean muuttujan funktioiden ja distribuutioiden tulojen osittaisderivaatoille. □

[64]Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646–1716, Saksa.

11. Kompaktikantajaiset distribuutiot

11.1. Distribuution kantaja.

Määritelmä 11.1. Distribuutiot Λ_1 ja $\Lambda_2 \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ *yhtyvät avoimessa joukossa* $\Omega' \subset \Omega$, mikäli

$$\langle \varphi, \Lambda_1 \rangle = \langle \varphi, \Lambda_2 \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Erityisesti $\Lambda = 0$ *avoimessa joukossa* Ω', eli Λ *häviää avoimessa joukossa* Ω' mikäli $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0$ kaikilla testifunktioilla φ, joiden kantaja sisältyy joukkoon Ω'.

Esimerkki 11.2. Lokaali-integroituva funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ häviää melkein kaikkialla avoimessa joukossa $\Omega' \subset \Omega$, mikäli vastaava säännöllinen distribuutio Λ_f häviää avoimessa joukossa Ω'.

Määritelmä 11.3. Distribuution Λ *kantaja* $\operatorname{supp} \Lambda$ on suljettu joukko

$$\operatorname{supp}\Lambda = \Omega \smallsetminus \bigcup_{\Lambda=0 \ \Omega'\text{:ssa}} \Omega' = \Omega \smallsetminus \bigcup \{\Omega' \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda \rangle = 0, \text{ kun } \operatorname{supp} f \subset \Omega'\}.$$

Esimerkki 11.4.

$$\operatorname{supp} \Lambda = \emptyset \iff \Lambda = 0$$
$$\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}.$$

Huomautus 11.5. $\Lambda = 0$ joukossa $\bigcup \{\Omega' \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda \rangle = 0, \text{ kun } \operatorname{supp} f \subset \Omega'\}$.

Perustelu. Tämä ei ole ihan triviaalia, mutta jätetään silti harjoitustehtäväksi (0.0.99.) Todistus perustuu seuraavaan tunnetuun lemmaan, jota tarvitsemme muuhunkin:

Lemma 11.6. (Ykkösen osituslemma) *Olkoon $(\Omega_i)_{i \in I}$ perhe avoimia joukkoja $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ ja $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Silloin on olemassa jono $\mathcal{D}(\Omega)$-funktioita $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siten, että*

a) *jokaisen funktion ψ_n kantaja sisältyy johonkin avoimista joukoista Ω_i.*
b) *$\sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n = 1$ joukossa Ω.*
c) *Jokaista kompaktia joukkoa $K \subset \Omega$ kohti on olemassa avoin joukko $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^{m} \psi_n = 1$ joukossa A.*

Todistus. Harjoitustehtävä 0.0.98. □

Lause 11.7. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ distribuutio.*

a) *Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \Lambda = \emptyset$, niin $\langle f, \Lambda \rangle = 0$.*
b) *Jos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $\Omega' \supset \operatorname{supp} \Lambda$, niin $\Lambda \psi = \Lambda$.*

Todistus. (a) on määritelmän toisto. (b) on helppo harjoitustehtävä (0.0.100).

11.2. Kompakti kantaja ja äärellinen aste.

Lause 11.8. *Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Distribuution $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ kantaja on kompakti.*
(ii) *Distribuutio $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ on äärellisasteinen ja sillä on yksikäsitteinen jatko $\Lambda \in C^\infty(\Omega)^*$.*

(iii) *Distribuutiolla* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ *on jatko* $\Lambda \in C^\infty(\Omega)^*$.

Todistus. Muistetaan kohdasta 9.3, että avaruudessa $C^\infty(\Omega)$ on käytössä lokaalikonveksi metrisoituva topologia, jonka virittävät seminormit ovat derivaattojen sup-normit $q_n(f) = \|D^n f\big|_{K_n}\|_\infty$ yli avoimen joukon Ω tyhjennykseen kuuluvien kompaktien joukkojen K_n. Saman topologian määrittelee myös seminormien $p_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n$ kasvava jono.

Olkoon aluksi ehdon (iii) mukaisesti $\Lambda \in C^\infty(\Omega)^*$. Lauseen 9.14 mukaan inkluusiokuvaus $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ on jatkuva, joten $\Lambda \big|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Koska kuitenkin Λ on jatkuva suorastaan $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$:ssa, on olemassa seminormi p_n, jolla $|\langle \cdot, \Lambda\rangle| \le p_n$. Tarkastellaan testifunktiota $f \in D(\Omega)$, jolla $\operatorname{supp} f \subset \Omega \setminus K_n$. Selvästi $p_n(f) = 0$, joten $\langle f, \Lambda\rangle = 0$. Huomaamme todistaneemme, että $\operatorname{supp}\Lambda \subset K_n$ ja että siis jokainen $\Lambda \in C^\infty(\Omega)^*$ määrää kompaktikantajaisen distribuution.

Tarkastellaan seuraavaksi kohdan (i) mukaisesti mielivaltaista kompaktikantajaista distribuutiota $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Osoitetaan ensin, että Λ on äärellisasteinen. Koska $\operatorname{supp}\Lambda$ on kompakti, niin ykkösen osituslemman 11.6 helppona erikoistapauksena on olemassa funktio $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, jolle $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $\Omega' \supset \operatorname{supp}\Lambda$. Olkoon $K = \operatorname{supp}\psi$. Koska $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, niin on olemassa $C_1 > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ pätee

$$|\langle \varphi, \Lambda\rangle| \le C_1 \|\varphi\|_N,$$

missä $\|\varphi\|_N = \max_{j\le N} \|D^j\varphi\|_\infty$. Jotta Λ olisi äärellisasteinen, on vastaavanlaisen epäyhtälön oltava voimassa kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Näin onkin asianlaita, sillä funktioiden tulon derivoimiskaavalla saadaan mielivaltaiselle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\|\psi\varphi\|_N = \max_{j\le N} \|\sum_{\alpha=0}^{N} \binom{j}{\alpha} D^{j-\alpha}\psi D^\alpha\varphi\|_\infty \le C_2\|\varphi\|_N,$$

missä vakio $C_2 > 0$ riippuu kiinnittämästämme funktiosta ψ. Koska mielivaltaiselle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on $\psi\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on

$$|\langle \varphi, \Lambda\rangle| = |\langle \psi\varphi, \Lambda\rangle| \le C_1\|\psi\varphi\|_N \le C_1C_2\|\varphi\|_N,$$

joten Λ on äärellisasteinen.

Konstruoidaan seuraavaksi Λ:lle jatko avaruuteen $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Olkoon ψ kuten edellä. Lineaarimuodon $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ voi jatkaa avaruuteen $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ asettamalla kaikille $f \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f, \Lambda\rangle = \langle \psi f, \Lambda\rangle,$$

sillä oikea puoli on määritelty ja lineaarinen f:n suhteen ja kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on $\langle \varphi, \Lambda\rangle = \langle \psi\varphi, \Lambda\rangle$. On todistettava näin jatketun Λ:n jatkuvuus, ja silloin saadaan samalla sen yksikäsitteisyys, koska $\mathcal{D}(\Omega)$ on huomautuksen 9.8 mukaan tiheä avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Distribuution jatkuvuuden toteamiseen riittää lauseen 9.24 mukaan tarkastaa jonojatkuvuus origossa. Tarkastellaan siis jonoa $f_j \to 0$ avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikissa kompakteissa $K \in \Omega$ on $\sup_{x\in K} |D^n f_j(x)| \to 0$. Tulon derivoimiskaava osoittaa, että silloin $\psi\, f_j \to 0$ avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$, joten, koska $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, niin

$$\langle f_j, \Lambda\rangle = \langle \psi f_j, \Lambda\rangle \to 0. \qquad \square$$

Lause 11.9. *Olkoon $\Omega = \mathbb{R}$ ja distribuution Λ kantaja yksi piste $\{x\}$. Silloin (ja tietenkin vain silloin) Λ on lineaarikombinaatio Diracin mitasta δ_x ja sen äärellisen monesta derivaatasta, ts.*

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \, D^j \delta_x.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $x = 0$. Edellisen lauseen mukaan Λ on äärellisasteinen, olkoon sen aste N.

Oletus $\operatorname{supp} \Lambda = \{0\}$ merkitsee, että $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0$ aina, kun $0 \notin \operatorname{supp} \varphi$.

Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että jos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $D^k \varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots, N$, niin $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0$, sillä ehto $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $D^k \varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots N$ merkitsee, että

$$\operatorname{Ker}(\Lambda) \supset \operatorname{Ker}(\delta) \cap \operatorname{Ker}(D\delta) \cdots \cap \operatorname{Ker}(D^N \delta),$$

mikä lineaarialgebrallisen lemman 7.11 mukaan takaa, että Λ on lineaarikombinaatio lineaarimuodoista δ, $D\delta \ldots D^N \delta$.

Tarkastellaan siis funktiota $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, jolla $D^k \varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots, N$, ja pyritään osoittamaan, että $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0$. Valitaan aluksi kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti kompakti väli $K = [-\rho, \rho]$ siten, että

$$\|D^N \varphi\big|_K\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Tällöin on kaikilla $k \leq N$ ja $x \in K$

$$|D^k \varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{N-k}.$$

Valitaan apufunktio ψ, jolla $\psi(x) = 1$ jossain origon ympäristössä ja jonka kantaja sisältyy $\mathbb{R}$:n yksikköväliin. Määritellään kaikilla $r > 0$ funktio $\psi_r(x) = \psi\big(\frac{x}{r}\big)$. Riittävän pienellä r on $\operatorname{supp} \psi_r \subset K$. Tulon derivoimiskaavasta saadaan

$$D^k(\psi_r \varphi)(x) = \sum_{\beta \leq k} \binom{k}{\beta} r^{\beta - k} D^{k-\beta} \psi\big(\tfrac{x}{r}\big) D^\beta \varphi(x),$$

joten sopivalla vakiolla C pätee

$$\|\psi_r \varphi\|_N \leq \varepsilon C \|\psi\|_N,$$

kunhan r on tarpeeksi pieni.

Koska Λ:n aste on N, on olemassa vakio C_1 siten, että $|\langle \vartheta, \Lambda \rangle| \leq C_1 \|\vartheta\|_N$ kaikilla $\vartheta \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. Koska $\psi_r = 1$ nollan ympäristössä, ja $\operatorname{supp} \psi_r \subset K$, niin

$$|\langle \varphi, \Lambda \rangle| = |\langle \psi_r \varphi, \Lambda \rangle| \leq C_1 \|\psi_r \varphi\|_N \leq C_1 \varepsilon C \|\psi\|_N.$$

Koska ε oli mielivaltainen, tästä seuraa, että

$$|\langle \varphi, \Lambda \rangle| = 0. \qquad \square$$

11.3. **Kaikki distribuutiot derivaattoina.**

Totesimme edellä, että distribuutio, jonka kantaja on yksi piste, muodostuu Diracin δ-mitan derivaatoista. Diracin mitta δ_x on puolestaan Heavisiden porrasfunktion derivaatta, ja siis jatkuvan funktion $f(t)$ =max$\{t-x,0\}$ toinen derivaatta. Käyttämällä induktiota huomaa, että jokainen distribuutio, jonka kantaja on äärellinen joukko, on lineaarikombinaatio funktioiden eriasteisista derivaatoista, siis jonkin jatkuvan funktion (korkeampiasteinen) derivaatta. Itse asiassa kaikki muutkin distribuutiot ovat ainakin lokaalisti funktioiden, vieläpä jatkuvien funktioiden, jonkin kertaluvun derivaattoja. Siksi distribuutioiden avaruus on suppein jatkuvat funktiot sisältävä avaruus, jossa kaikki derivointi on mahdollista. Muotoilemme tuloksen kolmena lauseena.

Lause 11.10. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ ja $K \subset \Omega$ kompakti joukko avoimessa reaalilukujoukossa Ω.*

Silloin on olemassa jatkuva funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ja luku $\alpha \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla aliavaruuteen $\mathcal{D}_K(\Omega)$ kuuluvilla funktioila φ pätee

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = (-1)^\alpha \int_\Omega D^\alpha \varphi \cdot f.$$

Todistus. Voi olettaa, että $K \subset [0,1]$. Kaikille $\psi \in \mathcal{D}_{[0,1]}(\Omega)$ voidaan määritellä koko reaalilukujoukkoon nollajatko $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \psi(x)$, kun $x \in \Omega$, ja 0 muuten. Nyt kaikilla $x \in [0,1]$ ja $\psi \in \mathcal{D}_{[0,1]}(\Omega)$ on

$$\psi(x) = \psi(x) - 0 = \psi(x) - \psi(0) = \int_0^x D\psi(t)\,dt.$$

Koska derivointikuvaus $D : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_K(\Omega) : \varphi \mapsto D\varphi$ siis on bijektio, niin sitä ovat myös ylemmät derivoinnit eli kuvauksella $D^{n+1} : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_K(\Omega)$ on käänteiskuvaus $(D^{n+1})^{-1}$, joka tietenkin on lineaarinen. Voimme siis määritellä lineaarimuodot $\Lambda_n : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ asettamalla kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$\langle \varphi, \Lambda_n \rangle = \langle (D^{n+1})^{-1}\varphi, \Lambda \rangle,$$

eli

$$\langle D^{n+1}\varphi, \Lambda_n \rangle = \langle \varphi, \Lambda \rangle.$$

Kuvaus $\Lambda \mapsto \Lambda_n$ on $(n+1)$-kertaisen integroinnin $(D^{n+1})^{-1} : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_K(\Omega)$ algebrallisen transpoosin rajoittuma avaruuteen $\mathcal{D}_K(\Omega)^*$. Osoitetaan, että

(i) Jollain $n \in \mathbb{N}$ kuvaus Λ_n on jatkuva avaruuden $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset L^1(K,dx)$ integraalinormin $\|\cdot\|_1$ mielessä.

(ii) Λ_n voidaan jatkaa avaruuden $L^1(K,dx)$ jatkuvaksi lineaarimuodoksi $\Lambda_n \in L^1(K,dx)^* = L^\infty(K,dx)$, ts.

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \langle D^{n+1}\varphi, \Lambda_n \rangle = \int_K D^{N+1}\varphi \cdot g$$

jollain $g \in L^\infty(K,dx)$.

(iii) Lauseen väite pätee.

(i) On osoitettava, että on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja vakio $C > 0$ siten, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on

$$|\langle \varphi, \Lambda_n \rangle| \le C \int_K |\varphi|.$$

Koska kaikilla $x \in [0,1]$ ja $\varphi \in \mathcal{D}_{[0,1]}(\Omega)$ on $\varphi(x) = \int_0^x D\varphi(t)\,dt$, niin

$$\|\varphi(x)\|_\infty \le \int_0^x |D\varphi(t)|\,dt.$$

Soveltamalla samaa päättelyä derivaattoihin huomaa, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi\|_n = \|D^n \varphi\|_\infty \le \int_0^1 |D^{n+1}\varphi(x)|\,dx.$$

Koska toisaalta $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, niin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ ja $C > 0$ siten, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|\langle \varphi, \Lambda \rangle| \le C \|\varphi\|_N,$$

joten erityisesti

$$|\langle D^{N+1}\varphi, \Lambda_N \rangle| = |\langle \varphi, \Lambda \rangle| \le C \int_0^1 |D^{N+1}\varphi(x)|\,dx.$$

ja siis kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on

$$|\langle \varphi, \Lambda_N \rangle| \le C \int_K |\varphi(x)|\,dx.$$

Luvuksi α kelpaa siis $N+1$.

(ii) Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen 3.8 nojalla on olemassa $L^1(K,dx)$-jatkuvan lineaarimuodon $\Lambda_N \in \mathcal{D}_K(\Omega)'$ jatko avaruuden $L^1(K,dx)$ jatkuvaksi lineaarimuodoksi $\Lambda_N \in L^1(K,dx)^*$. Tunnetusti[65] avaruuden $L^1(K,dx)$ topologinen duaali on $L^\infty(K,dx)$, joten on olemassa Borel-mitallinen $g \in L^\infty(K,dx)$ siten, että

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \langle D^{N+1}\varphi, \Lambda_N \rangle = \int_K D^{N+1}\varphi\, g.$$

(iii) Jatketaan g nollana koko avaruuteen $\mathbb{R}$ ja osittaisintegroidaan:

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} D^{N+1}\varphi(x)\, g(x)\,dx = (-1)^N \int_{-\infty}^{\infty} D^{N+2}\varphi(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt \right) dx.$$

Määritellään $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$, jolloin f on jatkuva ja

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = (-1)^N \int_\Omega D^{N+2}\varphi \cdot f.$$

□

[65] Avaruuden $L^\infty(K,dx)$ duaali on paljon laajempi kuin $L^1(\mu)$. Sen alkiot voi samaistaa rajoitettuihin, merkillisiin dx:n suhteen absoluuttisesti jatkuviin äärellisesti additiivisiin mittoihin.

Lause 11.11. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ ja $K = \operatorname{supp} \Lambda$ kompakti. Olkoon V avoin joukko siten, että $K \subset V \subset \Omega \subset \mathbb{R}$. Merkitään distribuution Λ astetta N. ($N < \infty$, ks. 11.8.)*

Silloin on olemassa jatkuvat funktiot $f_1, \dots, f_{N+2} : \Omega \to \mathbb{R}$, joilla $\operatorname{supp} f_i \subset V$ *ja*

$$\Lambda = \sum_{\beta=0}^{N+2} D^\beta f_\beta.$$

Todistus. Valitaan jokin avoin W siten, että $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$ ja $\overline{W}$ on kompakti. Sovelletaan lausetta 11.10 valiten siinä esiintyvän kompaktin joukon K rooliin $\overline{W}$, jolloin saadaan jatkuva funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ja luku $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{W}}(\Omega)$

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = (-1)^N \int_\Omega (D^{N+2}\varphi)\, f. \tag{11.1}$$

Yhtälö 11.1 säilyy voimassa kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{W}}(\Omega)$, vaikka f kerrottaisiin millä tahansa sellaisella jatkuvalla funktiolla ψ, jolla rajoittuma $\psi\big|_{\overline{W}}$ on 1. Valitaan tällainen ψ vaatien suorastaan, että $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\psi = 1$ jossain avoimessa joukossa U, jolla $\overline{W} \subset U$, jolloin jokaisella $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \Lambda \rangle &= \langle \psi\varphi, \Lambda \rangle \\
&= (-1)^N \int_\Omega \big(D^{N+2}(\psi\varphi)\big) \cdot f \\
&= (-1)^N \int_\Omega \sum_{\beta=0}^{N+2} \tbinom{N+2}{\beta} D^{N+2-\beta}\psi D^\beta \varphi \cdot f \\
&= \int_\Omega \sum_{\beta=0}^{N+2} (-1)^\beta f_\beta D^\beta \varphi, \\
&= \int_\Omega \sum_{\beta=0}^{N+2} D^\beta f_\beta \cdot \varphi,
\end{aligned}$$

missä $f_\beta = (-1)^{N-\beta} \binom{N+2}{\beta} D^{N+2-\beta}\psi \cdot f$. □

Lause 11.12. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

On olemassa jono jatkuvia funktioita $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

a) *Mikään kompakti joukko $K \subset \Omega$ ei leikkaa useamman kuin äärellisen monen funktion g_n kantajaa ja*
b) $\Lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} D^n g_n$.

Jos Λ on äärellisasteinen, niin summaan riittää ottaa äärellisen monta funktiota g_n.

Todistus. Harjoitustehtävän 0.0.97 mukaan on olemassa kompaktit välit Q_i ja avoimet joukot Ω_i (i=1,2,…) siten, että

(i) $Q_i \subset \Omega_i \subset \Omega$,
(ii) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$, ja

(iii) mikään kompakti joukko $K \subset \Omega$ ei leikkaa useampaa kuin äärellisen monta joukkoa Ω_i.

Ykkösen osituslemman 11.6 nojalla on olemassa jono funktioita $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ siten, että

a) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists i \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{supp} \psi_n \subset \Omega_i$.
b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n = 1$ joukossa Ω.
c) Jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ kohti on olemassa avoin $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^{m} \psi_n = 1$ joukossa A.

Sovelletaan edellistä lausetta 11.11 jokaiseen tulodistribuutioon $\psi_i \Lambda$ ja saadaan äärelliset summat:

$$\psi_i \Lambda = \sum_{\alpha} D^\alpha f_{i,\alpha}.$$

Määritellään kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}$

$$g_\alpha = \sum_{\alpha} f_{i,\alpha}$$

huomaten, että summassa on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä, kun rajoitutaan kompaktiin joukkoon. Siis jokainen g_α on jatkuva Ω:ssa eikä mikään kompakti joukko $K \subset \Omega$ leikkaa useamman kuin äärellisen monen funktion g_n kantajaa.

Koska $1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n$, on jokainen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ lausuttavissa kompakteissa joukoissa äärellisenä summana $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi \psi_n$, niin että

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \Big\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi \psi_n, \Lambda \Big\rangle = \Big\langle \varphi, \sum_{n \in \mathbb{N}} \Lambda \psi_n \Big\rangle,$$

ja siis

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i \Lambda \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha} D^\alpha f_{i,\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} D^\alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} f_{i,\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} D^\alpha g_\alpha. \end{aligned}$$

Jos lopuksi Λ on äärellisasteinen, niin edellisen lauseen mukaan riittää äärellisen monta funktiota g_α. $\square$

12. Konvoluutio

12.1. Kahden funktion konvoluutio.

Huomautus 12.1. Seuraavassa tarkastellaan koko reaaliakselilla määriteltyjä funktioita ja distribuutioita, ts. $\Omega = \mathbb{R}$.

Määritelmä 12.2. Kahden funktion $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *konvoluutio* on funktio

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt,$$

kun oikean puolen Lebesgue-integraali on olemassa.

Huomautus 12.3. Jos merkitsemme $\tau_x(g)$:llä funktiota g siirrettynä x:n verran oikealle: $\tau_x(g)(t) = g(t-x)$, ja merkitsemme $\tilde{g}$:lla funktion g peilikuvaa $\tilde{g}(t) = g(-t)$, niin $\tau_x(\tilde{g})(t) = g(x-t)$ ja konvoluution määritelmä saa tiiviin muodon

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\tau_x(\tilde{g})(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f\,\tau_x(\tilde{g}) = \langle \tau_x(\tilde{g}, \Lambda_f \rangle.$$

Yksityiskohtien tarkastaminen jää harjoitustehtäväksi 0.0.106.

Huomautus 12.4. Konvoluutiolla ja siirrolla on reaalianalyysin kirjoista löytyviä hyviä ominaisuuksia, mm seuraavat:

(1) Konvoluutio on bilineaarikuvaus.
(2) Yleensä $f * g$ on yhtä "sileä" kuin sileämpi funktioista f ja g.
(3) $Df * g = f * Dg = D(f * g)$.
(4) $f * g = g * f$.
(5) $(f * g) * w = g * (f * w)$.
(6) $(\tau_x \circ \tau_x)(f) = \tau_{x+y}(f)$
(7) $(\tau_x(f))^\sim = \tau_{-x}(\tilde{f})$
(8) Fourier-muunnoksessa konvoluutio muuttuu tuloksi.

$$(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Lukija katsokoon vaikka animaatioita Wikipediasta saadakseen tuntuman konvoluution ja näiden kaavojen merkitykseen. Tarkoituksenamme on määritellä konvoluutio ja Fourier-muunnos myös distribuutioille ja yleistää näitä kaavoja. Aivan kaikki ei yleisty.

12.2. **Distribuution ja funktion konvoluutio.**

Huomautus 12.5. Todennäköisyyslaskennan ystävät huomannevat heti, että jos u ja v ovat joidenkin riippumattomien satunnaismuuttujien jakaumien tiheysfunktioita, niin niiden konvoluutio on satunnaismuuttujien summan jakauman tiheysfunktio. Myös diskreettien jakaumien summalle on olemassa samantapainen kaava. Molemmat voidaan yhdistää samaksi kaavaksi, jos onnistutaan määrittelemään konvoluutio myös distribuutioille. Tämä tehdään seuraavassa. Määritellään ensin funktion ja distribuution konvoluutio ja sitten kahden distribuution konvoluutio.

Määritelmä 12.6. Funktion $\varphi \in \mathcal{D}$ ja distribuution $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *konvoluutio* on $\mathcal{C}^\infty$-funktio[66] (Derivoituvuuden todistus alla 12.8 (ii).)

$$(\varphi * \Lambda)(x) = \langle \tau_x(\tilde{\varphi}), \Lambda \rangle.$$

jTämä määritelmä yhtyy aikaisempaan määritelmään 12.2, jos $\Lambda = \Lambda_u$ on säännöllinen distribuutio eli funktio.[67]

[66]kuten säännöllisempi tekijöistä!

[67]Ks. myös määritelmän laajennuksia 12.15 ja 13.24.

Määritelmä 12.7. Distribuutio $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *siirretään oikealle* luvun x verran korvaamalla se distribuutiolla $\tau_x\Lambda$, jolle

$$\langle \varphi, \tau_x\Lambda\rangle = \langle \tau_{-x}\varphi, \Lambda\rangle.$$

Lause 12.8. *Funktion ja distribuution konvoluutiolla ja siirroilla on mm. seuraavat ominaisuudet: Kaikilla $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}$:*

(i) $\tau_x(\Lambda * \varphi) = (\tau_x\Lambda) * \varphi = \Lambda * (\tau_x\varphi)$
(ii) $D(\Lambda * \varphi) = (D\Lambda) * \varphi = \Lambda * (D\varphi)$
(iii) $(\Lambda * \varphi) * \psi = \Lambda * (\varphi * \psi)$

Todistus. (i): Seuraavia, ja tarvittaessa muita vastaavia, helposti verifioituvia kaavoja käyttäen saadaan kaikki suoraan laskemalla, esimerkiksi näin:

$$\begin{aligned}
(\tau_x(\Lambda * \varphi))(y) &= (\Lambda * \varphi)(y - x) = \langle \tau_{y-x}\tilde{\varphi}, \Lambda\rangle, \\
((\tau_x\Lambda) * \varphi)(y) &= \langle \tau_y\tilde{\varphi}, \tau_x\Lambda\rangle = \langle \tau_{y-x}\tilde{\varphi}, \Lambda\rangle, \\
(\Lambda * (\tau_x\varphi))(y) &= \langle \tau_y\ (\tau_x\varphi)^{\sim}, \Lambda\rangle = \langle \tau_{y-x}\tilde{\varphi}, \Lambda\rangle.
\end{aligned}$$

(ii): Konvoluutio $\Lambda *$ sovelletuna yhtälön

$$\tau_x((D\varphi)^{\sim}) = -D(\tau_x\tilde{\varphi})$$

molempiin puoliin antaa:

$$(\Lambda * (D\varphi))(x) = ((D\Lambda) * \varphi)(x),$$

joka on väitteen (ii) jälkimmäinen yhtäläisyys. Ensimmäisen osoittamiseksi merkitään kaikilla $r > 0$

$$\varepsilon_r = \frac{\tau_0 - \tau_r}{r}$$

ja käytetään kohtaa (i):

$$\varepsilon_r(\Lambda * \varphi) = \Lambda * (\varepsilon_r\varphi).$$

Kun $r \to 0$, niin

$$\varepsilon_r\varphi \to D\varphi \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

joten kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\tau_x((\varepsilon_r\varphi)^{\sim}) \to \tau_x(D\varphi)^{\sim} \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ja siis

$$\lim_{r\to 0}(\Lambda * (\varepsilon_r\varphi))(x) = (\Lambda * (D\varphi))(x).$$

Yhdistämällä kaksi edellistä saadaan

$$D(\Lambda * \varphi) = \Lambda * (D\varphi),$$

ja toistamalla tätä saadaan väitteen (ii) toinenkin yhtälö.

(iii): Funktioille ψ ja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee

$$(\varphi * \psi)^{\sim}(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(s)\, (\tau_s\tilde{\varphi})(t)\, ds. \tag{12.1}$$

Merkitään $\operatorname{supp}\tilde{\psi} = K_{\tilde{\psi}}$ ja $\operatorname{supp}\tilde{\varphi} = K_{\tilde{\varphi}}$ sekä $K = K_{\tilde{\psi}} + K_{\tilde{\varphi}}$. Yhtälön 12.1 oikea puoli voidaan tulkita $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-arvoisen jatkuvan funktion

$$s \mapsto \tilde{\psi}(s)\tau_s\tilde{\varphi}$$

integraaliksi yli kompaktin joukon $K_{\tilde{\psi}}$, jonka ulkopuolella se häviää. Tästä päästään nopeasti tulokseen käyttämällä tietoja vektoriarvoisen kompaktikantajaisen jatkuvan funktion integraalin olemassaolosta Borel-mitan suhteen.[68] Näin tulkiten voi siis yhtälön 12.1 kirjoittaa hiukan tiiviimmin

$$(\varphi * \psi)^{\sim} = \int_{K_{\tilde{\psi}}} \tilde{\psi}(s)\, \tau_s \tilde{\varphi}\, ds \qquad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{12.2}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}(\Lambda * (\varphi * \psi))(0) &= \langle (\varphi * \psi)^{\sim}, \Lambda \rangle \\ &= \int_{K_{\tilde{\psi}}} \tilde{\psi}(s)\, \langle \tau_s \tilde{\varphi}, \Lambda \rangle\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(-s)\, (\Lambda * \varphi)(s)\, ds \\ &= ((\Lambda * \varphi) * \psi)(0).\end{aligned}$$

Tämä on (iii) muuttujan arvolla 0. Yleinen tapaus saadaan siirrolla, käytännössä soveltamalla jo saatua funktioon $\tau_{-x}\psi$. □

12.3. **Konvoluutiosilotus.**

Määritelmä 12.9. Olkoon $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ei-negatiivinen, $\operatorname{supp} \psi \subset [-1, 1]$ ja $\int_{\mathbb{R}} \psi = 1$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ määritellään *silottaja*[69] $\psi_n(x) = n\psi(nx)$, jolloin $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on ei-negatiivinen, $\operatorname{supp} \psi \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ ja $\int_{\mathbb{R}} \psi_n = 1$. Lisäksi $\|D^k \psi_n\|_\infty = n^{(k+1)} \|D^k \psi\|_\infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 12.10. Lebesgue-mitallisen funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvoluutiosilotus* on funktion ja silottajan konvoluutio

$$f_n = (f * \psi_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x - t) \psi_n(t)\, dt.$$

Vastaavasti määritellään distribuution konvoluutiosilotus $\psi_n * \Lambda$.

Huomautus 12.11. Konvoluutiosilotusten jonolla on seuraavat ominaisuudet: Kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$

(1) $\varphi * \psi_n \to \varphi \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(2) $\psi_n * \Lambda \to \Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ topologiassa $w^* = \sigma(\mathcal{D}(\mathbb{R})^*, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$. Huomaa tulkinta: tässä $\psi_n * \Lambda$ tarkoittaa säännöllistä distribuutiota $\Lambda_{\psi_n * \Lambda}$
(3) Erityisesti ovat siis sileät funktiot tiheässä distribuutioiden avaruudessa ainakin distribuutioavaruuden standarditopologiassa $w^* = \sigma(\mathcal{D}(\mathbb{R})^*, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$.

Todistus. Jokaiselle jatkuvalle funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pätee tietenkin, että $f * \psi_n \to f$ tasaisesti kompakteissa joukoissa. Soveltamalla tätä funktioon $f = D^k\varphi$ saadaan kompakteissa joukoissa tasainen suppeneminen $D^k(\varphi * \psi_n) = D^k\varphi * \psi_n \to D^k\varphi$. Koska $\operatorname{supp} \varphi$ on kompakti ja $\operatorname{supp} \psi \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, niin kaikkien funktioiden $\varphi * \psi_n$ kantajat sisältyvät johonkin samaan kompaktiin joukkoon, mistä saadaan koko $\mathbb{R}$:ssä kaikille k tasainen suppeneminen $D^k(\varphi * \psi_n) \to D^k\varphi$. Näin on (1) todistettu

[68]Ks. esim. [3], Thm 3.27.
[69]Engl: Approximative identity, mollifier tai smoothening.

Kohta (2) seuraa edellä saadusta ja lauseen 12.8 kohdasta (iii), sillä

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\varphi},\Lambda\rangle &= (\Lambda*\varphi)(0)\\ &= \lim(\Lambda*(\psi_n*\varphi))(0)\\ &= \lim((\Lambda*\psi_n)*\varphi)(0)\\ &= \lim\langle\tilde{\varphi},\Lambda*\psi_n\rangle. \qquad\square\end{aligned}$$

12.4. **Kahden distribuution konvoluutio.**

Määritelmä 12.12. Distribuutioiden Λ_1 ja $\Lambda_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *konvoluutio* on distribuutio $\Lambda_1 * \Lambda_2 = \delta_0 \circ (\Lambda_1 * \cdot) \circ (\Lambda_2 * \cdot)$:

$$\varphi \mapsto \langle\varphi\,,\,\Lambda_1*\Lambda_2\rangle = (\Lambda_1*(\Lambda_2*\varphi))(0) \in \mathbb{C},$$

joka osoittautuu olevan hyvin määritelty distribuutio ainakin silloin, kun edes toisella distribuutioista Λ_1 ja Λ_2 on kompakti kantaja.

Huomautus 12.13. Selvittääksemme milloin on olemassa jatkuva lineaarikuvaus

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \overset{\Lambda_2*\cdot}{\to} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \overset{\Lambda_1*\cdot}{\to} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \overset{\delta_0}{\to} \mathbb{C}$$

tarkastamme, milloin sen osat ovat hyvin määritellyt ja jatkuvat. On mm. huolehdittava siitä, että $(\Lambda_1*\cdot)$ on määritelty ja jatkuva kuvajoukossa $\{\Lambda_2*\varphi \mid \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\}$. Seuraavat lauseet selvittävät nämä ongelmat.

Lause 12.14. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. Kuvauksella $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \varphi \mapsto \Lambda*\varphi$ on seuraavat ominaisuudet:*

(1) *L on jatkuva lineaarikuvaus $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*
(2) *L* kommutoi siirtojen kanssa*, ts. kaikilla $x\in\mathbb{R}$ on $\tau_x L = L\circ\tau_x$*
(3) *Ei ole olemassa muita siirtojen kanssa kommutoivia jatkuvia lineaarikuvauksia $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ kuin edellä kohdassa (1) mainitut kuvaukset $L = \Lambda*\cdot$, missä $\Lambda\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.*
(4) *$\Lambda_1*\cdot = \Lambda_2*\cdot \implies \Lambda_1 = \Lambda_2$, joten vastaavuus $\Lambda \mapsto \Lambda*\cdot$ on injektiivinen ja siis bijektio $\mathcal{D}(\mathbb{R})^* \to$* {siirtojen kanssa kommutoivat jatkuvat lineaarikuvaukset $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$}.

Todistus. (1) Olemme jo lauseessa 12.8 todistaneet, että $\Lambda*\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, kun $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tietenkin L on lineaarinen, joten sen jatkuvuuden voi tarkastaa lauseen 9.16 avulla eli riittää näyttää, että kuvauksen L rajoittuma jokaiseen aliavaruuteen $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ on jatkuva. Koska sekä $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ että $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ovat Frèchet'n avaruuksia, riittää suljetun kuvaajan lauseen 4.19 mukaan todeta, että jokaisella tällaisella rajoittumalla on (jono-)sujettu kuvaaja. Oletetaan $\varphi_n\to\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ ja $\Lambda*\varphi_n\to f\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. On osoitettava, että kaikilla $x\in\mathbb{R}$ on $f(x) = (\Lambda*\varphi)(x)$. Olkoon $x\in\mathbb{R}$. Koska $\tau_x\tilde{\varphi}_n \to \tau_x\tilde{\varphi}$ avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, niin todella

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(\Lambda*\varphi_n)(x) = \lim_{n\to\infty}\langle\tau_x\tilde{\varphi}_n,\Lambda\rangle = \langle\tau_x\tilde{\varphi},\Lambda\rangle = (\Lambda*\varphi)(x).$$

(2) Kommutointi seuraa edellisestä kohdasta ja siitä, että $\tau_x L = L\circ\tau_x$.

(3) Olkoon L jatkuva ja siirtojen kanssa kommutoiva. Määritellään $\Lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ asettamalla $\langle \varphi, \Lambda \rangle = (L\tilde{\varphi})(0)$. Koska peilauskuvaus $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ on jatkuva lineaarikuvaus $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ja evaluaatiokuvaus $\Delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$ on sekin jatkuva, Λ on distribuutio. Oletimme siirtojen kanssa kommutoinnin $\tau_x L = L \circ \tau_x$, joten

$$\begin{aligned}(L\varphi)(x) &= (\tau_{-x} L\varphi)(0) = (L\tau_{-x}\varphi)(0) \\ &= \langle (\tau_{-x}\varphi)^{\sim}, \Lambda \rangle = \langle \tau_x \tilde{\varphi}\,, \Lambda \rangle = (\Lambda * \varphi)(x).\end{aligned}$$

(4) Riittää osoittaa, että $\Lambda * \cdot = 0 \implies \Lambda = 0$. Olkoon $\Lambda * \cdot = 0$. Silloin kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on $\langle \Lambda, \varphi \rangle = (\Lambda * \tilde{\varphi})(0) = 0$. □

Seuraavaksi laajennetaan funktion ja distribuution konvoluution määritelmää 12.6, jossa funktio oli kompaktikantajainen, tilanteeseen, jossa funktion kantajasta ei sanota mitään, mutta distribuutio on kompaktikantajainen:

Määritelmä 12.15. Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja kompaktikantajaisen distribuution $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *konvoluutio* on $\mathcal{C}^\infty$-funktio

$$(\varphi * \Lambda)(x) = \langle \tau_x(\tilde{\varphi}), \Lambda \rangle.$$

Lause 12.16. *Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja kompaktikantajaisen distribuution $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ konvoluutiolle $\varphi * \Lambda \in \mathcal{C}^\infty$ pätee kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $\tau_x(\Lambda * \varphi) = (\tau_x \Lambda) * \varphi = \Lambda * (\tau_x \varphi)$
(ii) $D(\Lambda * \varphi) = (D\Lambda) * \varphi = \Lambda * (D\varphi)$

Jos lisäksi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, niin

(iii) $\Lambda * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *ja*
(iv) $\Lambda * (\varphi * \psi) = (\Lambda * \varphi) * \psi = (\Lambda * \psi) * \varphi$.

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) todistetaan samaan tapaan kuin lauseessa 12.8. Kohdan (iii) todistamiseksi huomataan, että $\operatorname{supp}(\tau_x \tilde{\psi}) = x - \operatorname{supp}\psi$, joten jos $\operatorname{supp}\Lambda \cap (x - \operatorname{supp}\psi) = \emptyset$, niin $(\Lambda * \psi)(x) = 0$. Toisin sanoen $(\Lambda * \psi)(x) = 0$, kun $x \notin \operatorname{supp}\Lambda \cap \operatorname{supp}\psi$ ja siis $\operatorname{supp}(\Lambda * \psi) \subset \operatorname{supp}\Lambda + \operatorname{supp}\psi$ on kompakti.

Kohta (iv) todistetaan palauttamalla se vastaavaan kohtaan lauseessa 12.8. Sitä varten tarkastellaan avointa, rajoitettua joukkoa $W \supset \operatorname{supp}\Lambda$. Valitaan kompaktikantajainen apufunktio $\varphi_W \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, jolla $\tilde{\varphi}_W = \tilde{\varphi}$ joukossa $W + \operatorname{supp}\psi$. Nyt joukossa W pätee $(\varphi * \psi)^{\sim} = (\varphi_W * \psi)^{\sim}$, joten

$$(\Lambda * (\varphi * \psi))(0) = (\Lambda * (\varphi_W * \psi))(0). \tag{12.3}$$

Koska kaikilla $-s \in \operatorname{supp}\psi$ pätee $\tau_s \tilde{\varphi} = \tau_s \tilde{\varphi}_W$ joukossa W, niin $\Lambda * \varphi = \Lambda * \varphi_W$ joukossa $-\operatorname{supp}\psi$. Näin ollen

$$((\Lambda * \varphi) * \psi)(0) = ((\Lambda * \varphi_W) * \psi)(0). \tag{12.4}$$

Koska $\operatorname{supp}(\Lambda * \psi) \subset (\operatorname{supp}\Lambda + \operatorname{supp}\psi)$, niin

$$((\Lambda * \psi) * \varphi)(0) = ((\Lambda * \psi) * \varphi_W)(0). \tag{12.5}$$

Väite arvolla $x = 0$ seuraa nyt siitä, että yhtälöiden (12.3)–(12.5) oikeat puolet ovat samat lauseen 12.8 nojalla. Yleinen tapaus saadaan jälleen soveltamalla jo saatua tulosta funktioon $\tau_{-x}\psi$. □

Huomautus 12.17. Määritelmän 12.12 mukaan kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee

$$\langle \varphi\,,\, \Lambda_1 * \Lambda_2 \rangle = (\Lambda_1 * (\Lambda_2 * \varphi))(0) \in \mathbb{C}.$$

Määritelmän 12.12 lauseke on edellä todetun mukaan mielekäs, joten distribuutioiden Λ_1 ja $\Lambda_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ konvoluutio $\Lambda_1 * \Lambda_2$ on olemassa ja $\Lambda_1 * \Lambda_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, kun edes toisella niistä on kompakti kantaja. Verifioidaan vielä jatkuvuusehto $\Lambda_1 * \Lambda_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. Oletetaan, että $\varphi_n \to 0$. Lauseen 12.14 kohdan (1) nojalla $(\Lambda_2 * \cdot)$ on jatkuva kuvaus $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, joten $\Lambda_2 * \varphi_n \to 0$ avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ topologiassa. Jos $\operatorname{supp} \Lambda_2$ on kompakti, niin $\Lambda_2 * \varphi_n \to 0$ avaruuden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ topologiassa. Siis $\langle \varphi\,,\, \Lambda_1 * \Lambda_2 \rangle = (\Lambda_1 * (\Lambda_2 * \varphi_n))(0) \to 0$.

Lause 12.18. *Olkoot Λ_1, Λ_2 ja $\Lambda_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.*

(1) *Jos ainakin toinen distribuutioiden Λ_1, Λ_2 kantajista K_1, K_2 on kompakti, niin $\Lambda_1 * \Lambda_2 = \Lambda_2 * \Lambda_1$.*
(2) *Jos ainakin toinen distribuutioiden Λ_1, Λ_2 kantajista K_1, K_2 on kompakti, niin $K_{\Lambda_1 * \Lambda_2} \subset K_1 + K_2$.*
(3) *Jos ainakin kaksi distribuutioiden Λ_1, Λ_2, Λ_3 kantajista K_1, K_2, K_3 ovat kompakteja, niin $(\Lambda_1 * \Lambda_2) * \Lambda_3 = \Lambda_1 * (\Lambda_2 * \Lambda_3)$.*[70]
(4) *Kaikilla $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ on $D\Lambda = (D\delta_0) * \Lambda$ ja $\delta_0 * \Lambda = \Lambda$.*
(5) *Jos ainakin toinen distribuutioiden Λ_1, Λ_2 kantajista K_1, K_2 on kompakti, niin $D(\Lambda_1 * \Lambda_2) = (D\Lambda_1) * \Lambda_2 = \Lambda_1 * (D\Lambda_2)$.*

Todistus. (1) Olkoon φ, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Koska funktioiden konvoluutio on kommutatiivinen, niin lauseen 12.8 mukaan

$$(\Lambda_1 * \Lambda_2) * (\varphi * \psi) = \Lambda_1 * (\Lambda_2 * (\varphi * \psi)) = \Lambda_1 * ((\Lambda_2 * \varphi) * \psi) = \Lambda_1 * (\psi * (\Lambda_2 * \varphi)).$$

Jos K_2 on kompakti, niin sovelletaan lausetta 12.8 uudelleen. Jos taas K_1 on kompakti, niin vedotaan lauseeseen 12.16. Kummassakin tapauksessa saadaan

$$(\Lambda_1 * \Lambda_2) * (\varphi * \psi) = (\Lambda_1 * \psi) * (\Lambda_2 * \varphi).$$

Koska $\varphi * \psi = \psi * \varphi$, saadaan samanlaisella laskulla myös

$$(\Lambda_2 * \Lambda_1) * (\varphi * \psi) = (\Lambda_2 * \varphi) * (\Lambda_1 * \psi).$$

Kummassakin yhtälössä oikea puoli on kahden funktion konvoluutio, ja funktioiden konvoluutio kommutoi, joten ne ovat samat. Siis

$$(\Lambda_1 * \Lambda_2) * (\varphi * \psi) = (\Lambda_2 * \Lambda_1) * (\varphi * \psi)$$

eli

$$((\Lambda_1 * \Lambda_2) * \varphi) * \psi = ((\Lambda_2 * \Lambda_1) * \varphi) * \psi.$$

Lauseen 12.14 todistuksen yksikäsitteisyyskohdan mukaan $\Lambda_1 * \Lambda_2 = \Lambda_2 * \Lambda_1$.

(2) Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pieni laskelma osoittaa, että

$$\langle \varphi, \Lambda_1 * \Lambda_2 \rangle = \langle (\Lambda_2 * \tilde{\varphi})^{\sim}, \Lambda_1 \rangle.$$

Kohdan (1) nojalla voimme olettaa, että nimenomaan K_2 on kompakti. Lauseen 12.8 todistuksesta käy ilmi, että

$$\operatorname{supp}(\Lambda_2 * \tilde{\varphi}) \subset K_2 - K_\varphi.$$

[70] Varo! Vastaava ei päde elleivät distribuutiot ole kompaktikantajaisia!

Siis $(\Lambda_1 * \Lambda_2) = 0$, kun $K_1 \cap K_\varphi - K_2 = \emptyset$, eli $K_1 + K_2 \cap K_\varphi = \emptyset$.

(3) Kohdasta (2) seuraa, että sekä $(\Lambda_1 * \Lambda_2) * \Lambda_3$ että $\Lambda_1 * (\Lambda_2 * \Lambda_3)$ on määritelty, kun ainakin kaksi joukoista K_1, K_2, K_3 ovat kompakteja. Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, niin suoraan distribuutioiden konvoluution määritelmästä seuraa, että

$$(\Lambda_1 * (\Lambda_2 * \Lambda_3)) * \varphi = \Lambda_1 * ((\Lambda_2 * \Lambda_3) * \varphi) = \Lambda_1 * (\Lambda_2 * (\Lambda_3 * \varphi)).$$

Jos K_3 on kompakti, niin

$$((\Lambda_1 * \Lambda_2) * \Lambda_3) * \varphi = (\Lambda_1 * \Lambda_2) * (\Lambda_3 * \varphi) = \Lambda_1 * (\Lambda_2 * (\Lambda_3 * \varphi)),$$

sillä lauseen 12.8 mukaan $\Lambda_3 * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan väite (3) siinä tapauksessa, että K_3 on kompakti. Jos K_3 ei ole kompakti, niin K_1 on kompakti, ja silloin edellinen tapaus yhdistettynä kommutatiivisuustulokseen (1) antaa

$$\Lambda_1 * (\Lambda_2 * \Lambda_3) = \Lambda_1 * (\Lambda_3 * \Lambda_2) = (\Lambda_3 * \Lambda_2) * \Lambda_1 = \Lambda_3 * (\Lambda_2 * \Lambda_1) = \Lambda_3 * (\Lambda_1 * \Lambda_2) = (\Lambda_1 * \Lambda_2) * \Lambda_3.$$

(4) Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, niin $\delta_0 * \varphi = \varphi$, onhan

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \delta_0(\tau_x \tilde{\varphi}) = (\tau_x \tilde{\varphi})(0) = \tilde{\varphi}(-x) = \varphi(x).$$

Näin ollen ensimmäinen väite saadaan kohdasta (3) ja lauseesta 12.8 seuraa, että

$$(D\Lambda_1) * \varphi = \Lambda_1 * D\varphi = \Lambda_1 * D(\delta_0 * \varphi) = \Lambda_1 * (D\delta_0) * \varphi.$$

Väite $\delta_0 * \Lambda = \Lambda$ seuraa tästä.

(5) Kohdista (4),(3) ja (1) saadaan:

$$D(\Lambda_1 * \Lambda_2) = (D\delta_0) * (\Lambda_1 * \Lambda_2) = ((D\delta_0) * \Lambda_1) * \Lambda_2 = (D\Lambda_1) * \Lambda_2$$

ja

$$(D\delta_0) * \Lambda_1 * \Lambda_2 = (\Lambda_1 * D\delta_0) * \Lambda_2 = \Lambda_1 * (D\delta_0 * \Lambda_2) = \Lambda_1 * D\Lambda_2.$$

13. Hitaasti kasvavien distribuutioiden Fourier-muunnos

13.1. Testifunktioavaruus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja hitaasti kasvavat distribuutiot.

Kahden distribuution Λ_1 ja Λ_2 konvoluutio voi olla määritelty myös, vaikka kumpikaan ei olisi kompaktikantajainen — näinhän on asianlaita esimerksi L^2-funktioille.

Määritelmä 13.1. *Hitaasti kasvava distribuutio*[71], kuuluu seuraavassa määriteltävän funktioavaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ duaaliin.

Määritelmä 13.2. *Nopeasti vähenevien funktioiden avaruus* on

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\Big|\; \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^N |D^n f(x)| < \infty \quad \forall N, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sileä funktio f on siis nopeasti vähenevä, jos jokainen sen derivaatatta konvergoi $\pm\infty$:ssä nollaan, vaikka se kerrottaisiin millä tahansa polynomilla.

Yhtäpitävää on tietenkin vaatia, että jokainen sen derivaatatta pysyy rajoitettuna funktiona, vaikka se kerrottaisiin millä tahansa polynomilla.

[71] Engl. tempered distribution.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ varustetaan normien

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^N|D^n f(x)| \qquad (N, n\in\mathbb{N})$$

määräämällä lokaalikonveksilla topologialla.

Lause 13.3. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on Frèchet'n avaruus.*

Todistus. Helppo harjoitustehtävä (0.0.111). □

Lause 13.4. *Nopeasti vähenevien funktioiden avaruudella $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on seuraava yhteys testifunktioavaruuteen $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:*

(1) *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
(2) *Inkluusio $\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on jatkuva*[72].
(3) *$\mathcal{S}(\mathbb{R})^*\subset\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ eli hitaasti kasvavat distribuutiot ovat distribuutioita sanan aikaisemmassa merkityksessä.*

Todistus. (a) Olkoon $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Valitaan $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ siten, että $\psi(x)=1$, kun $|x|\le 1$. Määritellään $f_j(x)=f(x)\psi(\frac{x}{j})$. On osoitettava, että kaikilla $N\in\mathbb{N}$ suppenee $(1+x^2)^N D^n(f_j-f)\to 0$ tasaisesti. Merkitään $P(x)=(1+x^2)^N$

$$\begin{aligned} P(x)D^n(f_j(x)-f(x)) &= P(x)D^n\Big(f(x)\left(\psi(\tfrac{x}{j})-1\right)\Big) \\ &= P(x)\sum_{k=0}^{n} D^k f(x)\cdot D^{n-k}\big(\psi(\tfrac{x}{j})\big)-1). \end{aligned}$$

Kun $j>m$, niin $D^{n-k}\big(\psi(\frac{x}{j})\big)-1)=0$ välillä $[-m,m]$. Koska f on nopeasti vähenevä, niin $p_{N,k}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^N|D^n f(x)|<\infty$, kaikilla $k=0,\dots,n$. Muuta ei tarvita.

(b) Koska polynomit ovat jatkuvia ja siis rajoitettuja kompakteissa joukoissa, niin $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indusoi aliavaruuksiinsa $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ niiden oman topologian, siis saman kuin $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Inkluusiot $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ovat siis jatkuvia, joten tarkan induktiivisen limeksen ominaisuuksien 9.16 mukaan inkluusio $\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on jatkuva.

(c) Seuraa kohdista (a) ja (b). □

Esimerkki 13.5. Seuraavat ovat hitaasti kasvavia distribuutioita:

a) kompaktikantajaiset distribuutiot
b) positiiviset Borel-mitat μ, joilla on olemassa $k\in\mathbb{N}$ siten, että:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k}<\infty$$

c) mitalliset funktiot g, joilla on olemassa $p\in[1,\infty[$ ja $N>0$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{g(x)}{(1+|x|^2)^N}<\infty$$

d) polynomit.

[72]Tietenkään metrisoitumaton $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ei ole metrisoituvan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:n aliavaruus.

Todistus. (a) Olkoon $K = \operatorname{supp}\Lambda$ kompakti. Valitaan apufunktio $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ joka saa arvon 1 avoimessa joukossa $U \supset K$. Olkoon

$$\langle f, \tilde{\Lambda}\rangle = \langle f\psi, \Lambda\rangle$$

Jos $f_i \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, niin $f_i\psi \to 0$ avaruuden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ topologiassa, joten $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. Toisaalta kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on $\langle f, \tilde{\Lambda}\rangle = \langle f, \Lambda\rangle$.

(b) Olkoon μ Borel-mitta, ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k} < \infty$. Pitää näyttää, että $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$ on jatkuva avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa. Oletetaan $f_j \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, jolloin erityisesti $\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty \to 0$. Nyt

$$|\langle f_j, \mu\rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\, d\mu| = |\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|x|^2)^k}{(1+|x|^2)^k} f_j(x)\, d\mu| \le \underbrace{\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty}_{\to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k}}_{<\infty}.$$

(c) Tässä $\langle \varphi, \Lambda_g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dx$. Tapaus $p = 1$ on erikoistapaus kohdasta (b). Jos taas $p \in]1, \infty[$, niin muistetaan *Hölderin epäyhtälö*, jonka mukaan: Jos $p > 1$ ja $q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sekä $f \in L^p$ ja $g \in L^q$, niin

$$|\int_{\mathbb{R}} fg\, d\mu| \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Jaetaan integroitava sopivasti tekijöiksi, sovelletaan Hölderin epäyhtälöä ja muistetaan, että tavoitteena on $|\langle \varphi, \Lambda_g\rangle| \le C\|D^k\varphi(x)(1+|x|^2)^N\|_\infty$ joillekin N, k ja C.

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, \Lambda_g\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dx| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(1+|x|^2)^N \frac{g(x)}{(1+|x|^2)^N}\, dx| \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^N}\right)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\text{C=vakio}} \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^M \cdot (1+|x|^2)^{N-M}\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\|\varphi(x)(1+|x|^2)^M\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left|(1+|x|^2)\right|^{(N-M)q}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{vakio}<\infty \text{ kun } M \text{ riittävän suuri}}.
\end{aligned}$$

(d) Polynomi toteuttaa edellisen kohdan ehdon. □

Huomautus 13.6. Derivaatan määritelmä antaa aiheen tarkastaa kaikkien distribuutioita koskevien lauseiden ja käsitteiden yhteyden hitaasti kasvaviin distribuutioihin ja vihjaisee, että on vielä tarkasteltava testifunktioavaruutta $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tässä on itse asiassa hyötyä Fourier- muunnoksesta, joten jätämme esimerkiksi hitaasti kasvavien distribuutioiden konvoluution tutkimisen hiukan tuonnemmaksi. Derivoinnin ja funktioiden tulon jatkuvuus kannattaa kuitenkin heti todeta:

Lause 13.7. *Seuraavat lineaarikuvaukset $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ovat jatkuvia:*

(1) *Derivointi.*
(2) *Kertominen millä tahansa polynomilla Q.*
(3) *Kertominen millä tahansa nopeasti vähenevällä funktiolla g.*

Todistus. (1) Tavoitteeksi riittää kaikilla $N, k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(D\varphi)(x)\|_\infty \le C\|(1+|x|^2)^{N'} D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin N', k' ja C. Voidaan valita $C = 1, k' = k+1$ ja $N' = N$.

(2) Tavoitteeksi riittää kaikilla $N, k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(Q\cdot\varphi)(x)\|_\infty \le \sum_{k'=1}^{N} \|P_{k'}(x) D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin $N' \in \mathbb{N}$ ja polynomeille $P_1, \ldots, P_N$. Tulon dervoimiskaava antaa

$$\begin{aligned}\|(1+|x|^2)^N D^k(Q\cdot\varphi)(x)\|_\infty &= \|(1+|x|^2)^N \sum_{j=0}^{k} (D^j Q(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\le \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^j Q(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty\end{aligned}$$

(3) Tavoitteeksi riittää kaikilla $N, k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(g\cdot\varphi)(x)\|_\infty \le C\sum_{k'=1}^{N} \|P_{k'}(x) D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin $N' \in \mathbb{N}$, $C > 0$ ja polynomeille $P_1, \ldots, P_N$. Tulon dervoimiskaava antaa

$$\begin{aligned}\|(1+|x|^2)^N D^k(g\cdot\varphi)(x)\|_\infty &= \|(1+|x|^2)^N \sum_{j=0}^{k} (D^j g(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\le \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^j g(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\le \max_{1\le j\le N} \|D^j g(x)\|_\infty \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty\end{aligned}$$

$\square$

Seuraus 13.8. *Hitaasti kasvavan distribuution derivaatta on hitaasti kasvava distribuutio.*

Todistus.

$$\langle f, D\Lambda\rangle = -\langle Df, \Lambda\rangle$$

ja edellisen lausen 13.7 kohta (1). □

13.2. **Klassinen Fourier-muunnos.**

Määritelmä 13.9. *Fourier-muunnos* määritellään eri funktio- ja distribuutioavaruuksissa vaiheittaisten laajennusten kautta.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi vaihdetaan aluksi avaruuteen $\mathbb{R}$ Lebesguen mitan dx tilalle *skaalattu mitta* $dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$.

Määritelmä 13.10. $L^1(\mathbb{R})$-funktion f *Fourier-muunnos* $\hat f$ eli $\mathcal{F}(f)$ määritellään suoraan klassisella lausekkeella:

$$\hat f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,dm.$$

Huomautus 13.11. Alkuperäinen funktio f on kompleksiarvoinen — se saa siis tietenkin olla reaaliarvoinen. Sama koskee muunnosta $\hat f$.

Määritelmän voi kirjoittaa lyhemmin:

$$\hat f(t) = \int_{\mathbb{R}} f e_{-t}\,dm,$$

missä mitan lisäksi myös *eksponenttifunktiota on vähän korjailtu* asettamalla

$$e_t(x) = e^{ixt}.$$

Skaalaamme vielä *konvoluutiokäsitettäkin* asettamalla:

$$(f \hat{*} g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dm(y).$$

Näin Fourier-muunnoksen määritelmä saa vielä lyhemmän muodon:

$$\hat f(t) = (f \hat{*} e_t)(0).$$

Huomautus 13.12. Korjaillulla eksponenttifunktiolla $e_t(x) = e^{itx}$ on seuraavat ominaisuudet:

a) $e_t(x+y) = e_t(x)e_t(y)$, ts. e_t on ryhmähomomorfismi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$. Kuvajoukko on $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, eli kyseessä on ryhmän $(\mathbb{R},+)$ ”*karakteeri*”.[73]
b) $e_t(x) = e_x(t)$
c) $De_t = ite_x$ ja siis jokaiselle polynomille $P(z) = \sum \lambda_j z^j$ on

$$\sum \lambda_j\, D^j\, e_t = P(it)\cdot e_t$$

Jos tämän yhtälön vasemman puolen differentiaalioperaattoria merkitään lyhemmin $\sum \lambda_j\, D^j = P(D)$, niin yhtälö saa muodon

$$P(D)\, e_t = P(it)\cdot e_t.$$

Lause 13.13. *$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$-funktioiden Fourier-muunnoksella $\mathcal{F} : f \mapsto \hat f$ on mm. seuraavat ominaisuudet:*[74] *Kaikilla f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ ja x, $t \in \mathbb{R}$:*

[73]Tähän perustuu mahdollisuus yleistää Fourier-muunnos muihin topologisiin ryhmiin.

[74]Eikö merkinnälle $\frac{f}{\lambda}$ voi mitään?

a) $\mathcal{F}$ *on lineaarinen*
b) $(\tau_x f)\hat{}\ = e_{-x}\hat{f}$
c) $(e_x f)\hat{}\ = \tau_{-x}\hat{f}$
d) $(f \hat{*} g)\hat{}\ = \hat{f}\,\hat{g}$
e) $(\frac{f}{\lambda})\hat{}\,(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)$, *kun* $\lambda > 0$. *Merkintä* $\frac{f}{\lambda}$ *tarkoittaa tässä funktiota* $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$.

Todistus. (a) on ilmeinen.

$$\text{(b) } (\tau_x f)\hat{}\,(t) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f)e_{-t}\,dm = \int_{\mathbb{R}} f\tau_{-x}e_{-t}\,dm = \int_{\mathbb{R}} fe_{-t}(x)e_{-t}\,dm = e_{-x}(t)\hat{f}(t).$$

$$\text{(c) } (e_x f)\hat{}\,(t) = \int_{\mathbb{R}} (e_x f)e_{-t}\,dm = \int_{\mathbb{R}} fe_{-(t-x)}\,dm = \tau_{-x}(t)\hat{f}(t).$$

(d) ja (e) Tehtävä 0.0.114. □

Huomautus 13.14. $L^2(\mathbb{R})$-funktioiden avaruudessa *Fourier-muunnos* $f \mapsto \hat{f}$ eli $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ määritellään yleensä seuraavalla jatkamistoimenpiteellä:

(1) Leikkauksessa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ Fourier-muunnos on kohdassa 13.10 jo määritelty, koska klassinen määritelmä pätee avaruudessa $L^1(\mathbb{R})$.
(2) Leikkaus $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$.
(3) Fourier-muunnos $\mathcal{F}$ on $\|\cdot\|_2$-isometria $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ja on siis jatkettavissa isometriaksi $\mathcal{F} : L^2 \to \mathcal{L}^2$.
(4) Fourier-muunnos $\mathcal{F}$ osoittautuu surjektioksi $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, siis Hilbert-avaruuden isometriseksi isomorfismiksi.**(Plancherelin[75] lause.)** $\mathcal{F}$ säilyttää siis myös avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ sisätulon.**(Parsevalin[76] kaava.)**
(5) Aliavaruudessa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ Fourier-muunnoksen käänteiskuvauksella $\mathcal{F}^{-1}$ on klassinen lauseke[77] **(Inversiokaava.)**:

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{ixt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} ge_x\,dm = (g \hat{*} e_x)(0).$$

Haluamme määritellä Fourier-muunnoksen kaikille nopeasti väheneville funktioille ja hitaasti kasvaville distribuutioille. Todistamme samalla edelliset väitteet yleisemmän teorian sivutuotteena.

13.3. Nopeasti vähenevien testifunktioiden Fourier-muunnos.

Lause 13.15. a) *Funktiolle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *pätee*

$$(Df)\hat{}\,(t) = it\hat{f}(t) \quad \textit{ja}$$
$$(xf)\hat{}\,(t) = -D\hat{f}(t).$$

ja siis jokaiselle polynomille $P(z)$ *on*

$$(P(D)\,f)\hat{}\,(t) = P(it)\cdot\hat{f}(t) \quad \textit{ja}$$
$$(P\cdot f)\hat{}\,(t) = P(-D)\hat{f}(t).$$

[75]Michel Plancherel 1885–1967, Sveitsi.
[76]Marc-Antoine Parseval des Chênes 1755–1836, Ranska.
[77]Huomaa eksponentin merkki!

b) *Fourier-muunnos*

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f e_{-t}\, dm$$

on jatkuva lineaarikuvaus[78] $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Todistus. (a) Lauseen 13.7 mukaan $Df \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Siis pätee

$$((Df)\hat{\ })(t) = ((Df) \hat{*} e_t)(0) = (f \hat{*} De_t)(0) = (f \hat{*} ite_t)(0) = it \cdot (f \hat{*} e_t)(0) = it\hat{f}(t),$$

joka on väitteen (a) ensimmäinen yhtälö. Toisen todistamiseksi lasketaan derivaatta $D\hat{f}$ määritelmän mukaan, siis erotusosamäärän raja-arvona:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}(t+\varepsilon) - \hat{f}(t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(t+\varepsilon)x}\, dm - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\, dm\right) \\ &= i \int_{\mathbb{R}} x f(x) \frac{e^{-ix\varepsilon} - 1}{ix\varepsilon} e^{-ixt}\, dm(x) \\ &\to i \int_{\mathbb{R}} x f(x)\ e^{-ixt}\, dm(x) = -(xf)\hat{\ }(t).\end{aligned}$$

Rajankäynti on luvallinen Lebesguen dominoidun konvergessin lauseen nojalla, onhan $xf \in L^1(\mathbb{R})$ ja $|e^{ixt}| = 1$. Väite toimii siis ensimmäiselle derivaatalle. Ylemmille derivaatoille ja differentiaalioperaattorille $P(D)$ se saadaan induktiolla.

(b) Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Merkitään $g(x) = (-1)^k x^k f(x)$. Tällöin $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Kohdan (a) mukaan $\hat{g} = D^k \hat{f}$ ja kaikilla polynomeilla

$$P(x) D^k \hat{f}(x) = P(x)\hat{g}(x) = (P(-D)g)\hat{\ }(x)$$

on rajoitettu funktio, koska $P(D)g \in L^1(\mathbb{R})$. Siis $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (13.2).

Jos $f_i \to f$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin voi pienellä laskulla todeta, että $f_i \to f$ myös avaruudessa $L^1(\mathbb{R})$. Tästä seuraa, että $\hat{f}_i(t) \to \hat{f}(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Pisteittäisestä konvergenssista saadaan suljetun kuvaajan lauseen 4.20 avulla konvergenssi avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$.

Seuraavat lauseet tähtäävät inversiokaavan todistamiseen avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lause 13.16. *Jokaisen $L^1(\mathbb{R})$-funktion f Fourier-muunnokselle pätee*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Lisäksi $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jatkuva funktio, joka häviää rajoilla $\pm\infty$.

Todistus. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ seuraa suoraan siitä, että $|e_t(x)| = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on helposti huomattavissa tiheäksi avaruudessa $L^1(\mathbb{R})$, voidaan valita jono $(f_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, jolla $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Koska $\mathcal{F}$ on kuvaus $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin jokainen $\hat{f}_n$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja on siis jatkuva funktio ja häviää rajoilla $\pm\infty$. Koska todistettiin $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ kaikille $f \in L^1(\mathbb{R})$, niin siis myös $\|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \to 0$, joten myös f on jatkuva funktio ja häviää rajoilla $\pm\infty$. $\square$

[78] Osoittautuu kohdassa 13.18 jopa isomorfismiksi.

Lemma 13.17. Kellokäyräfunktio $\phi(x) = e^{-x^2/2}$ *on nopeasti vähenevä ja sillä on ominaisuudet*

a) $\hat{\phi} = \phi$.

b) $\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}\, dm$.

Todistus. (a) ϕ on lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön $y' + xy = 0$ ratkaisu, samoin $\hat{\phi}$. Siis $\phi/\hat{\phi}$ on vakio. Koska lisäksi kumpikin funktio saa pisteessä 0 arvon 1, niin $\hat{\phi} = \phi$.

(b) Fourier-muunnoksen klassinen määritelmä antaa yhdessä (a)-kohdan kanssa

$$\phi(0) = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi\, dm = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}\, dm. \qquad \square$$

Lause 13.18. (Inversiokaava) *Nopeasti vähenevien funktioiden Fourier-muunnoksella on seuraavat ominaisuudet:*

a)

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g} e_x\, dm.$$

b) *Fourier-muunnos*

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f e_t\, dm$$

on lineaarinen homeomorfismi $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

c) *Inversiokaava pätee* $L^1(\mathbb{R})$*-funktioille siinä muodossa, että jos sekä* f *että* $\hat{f}$ *ovat integroituvia, niin melkein kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *on*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} e_x\, dm.$$

Todistus. Jos sekä f että g ovat integroituvia, niin Fubinin lausetta voi soveltaa integraaliin

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y) e_{-ixy} dm^2,$$

jolloin eri integroimisjärjetyksistä sadaan

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f} g\, dm = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}\, dm. \tag{13.1}$$

(a) Koska $g(x) = \tau_{-x} g(0)$, riittää todistaa inversiokaava kohdassa $x = 0$ eli

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}\, dm.$$

Valitaan yhtälössä (13.1) $f(x) = \phi(\frac{x}{\lambda})$, missä $\lambda > 0$ ja ϕ on lemman 13.17 kellokäyräfunktio $\phi(x) = e^{-x^2/2}$. Saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) \lambda \hat{\phi}(\lambda t)\, dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y)\, dm(y).$$

Pieni muuttujanvaihto vasemmalla puolella antaa

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(\tfrac{t}{\lambda}\right) \hat{\phi}(t)\, dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y)\, dm(y).$$

Kun $\lambda \to \infty$, niin $g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \to 0$ ja $\phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \to \phi(0)$, ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lause antaa siis

$$g(0)\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}\, dm = \phi(0)\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\, dm,$$

joka on sama kuin väite, koska $\phi(x) = e^{-x^2/2}$.

(b) Kohdan (a) nojalla on ilmeistä, että Fourier-muunnos $\mathcal{F} : g \mapsto \hat{g}$ on injektio $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Lisäksi inversiokaavasta voi päätellä, että $(\mathcal{F}\circ\mathcal{F})g\,(x) = g(-x)$, joten $\mathcal{F}^4$ on identtinen kuvaus ja siis $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \supset \mathcal{F}(\mathcal{F}^3(\mathcal{S}(\mathbb{R}))) = \mathcal{F}^4(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, joten $\mathcal{F}$ on surjektio, siis bijektio. Kuvauksen $\mathcal{F}$ jatkuvuus on jo todistettu kohdassa 13.15 ja käänteiskuvaus $\mathcal{F}^3$ on siis myös jatkuva.

(c) Olkoon

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} e_x\, dm.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön 13.1 saadaan vielä kerran Fubinin kaavaa käyttämällä

$$\int_{\mathbb{R}} f_0 \hat{g}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}\, dm.$$

Tämä on voimassa kaikille $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eli kaikille $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, erityisesti kaikille $\hat{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, eli $\int_{\mathbb{R}}(f_0 - f)\varphi\, dm = 0$ kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Siis $f_0 = f$ mk. □

Seuraus 13.19. *Nopeasti väheneville funktioille f ja g pätee:*

a) $(fg)\hat{} = \hat{f} \hat{*} \hat{g}$ *ja*
b) $f \hat{*} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Todistus. (a) Lauseen 13.13 mukaan $\mathcal{F}(f \hat{*} g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$. Valitaan f:n ja g:n rooleihin $\mathcal{F}f$ ja $\mathcal{F}g$ ja saadaan

$$(\mathcal{F}(\hat{f} \hat{*} \hat{g}))(x) = (\mathcal{F}^2 f)(x) \cdot (\mathcal{F}^2 g)(x) = f(-x)\cdot g(-x) = (fg)(-x) = \mathcal{F}^2(fg)(x).$$

Sovelletaan saatuun yhtälöön $(\mathcal{F}(\hat{f} \hat{*} \hat{g})) = \mathcal{F}^2(fg)$ puolittain käänteiskuvausta $\mathcal{F}^{-1}$ ja saadaan väite (a). Koska tietenkin $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni (fg)\hat{} = \hat{f}\hat{*}\hat{g}$, mistä (b) seuraa, koska $\mathcal{F}$ on surjektio $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Lause 13.20. (Plancherelin ja Parsevalin kaavat) *Fourier-muunnoksella $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on yksikäsitteinen jatko isometriseksi isomorfismiksi $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.*

Todistus. Selvästi $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Osoitetaan, että $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ säilyttää Hilbert-avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ sisätulon ja siis myös normin: Olkoot f ja $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inversiokaavasta saadaan (tässä yläviiva edustaa kompleksikonjugaattia):

$$\begin{aligned}
(g, f) = \int_{\mathbb{R}} \bar{g} f \, dm &= \int_{\mathbb{R}} \bar{g}(x) \big(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} \, dm(t) \big) \, dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \big(\int_{\mathbb{R}} \bar{g}(x) e^{itx} \, dm(x) \big) \, dm(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \big(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x) e^{-itx}} \, dm(x) \big) \, dm(t) = (\hat{g}, \hat{f}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} \, dm(t) = (\hat{g}, \hat{f}).
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on helposti huomattavissa tiheäksi myös avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$. Fourier-muunnos on siis isometrinen bijektio metrisen avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ tiheältä aliavaruudelta $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ saman avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ tiheälle aliavaruudelle $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Jatko täydentymien välille on isometria $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Hilbert-avaruuden isometrinen isomorfismi säilyttää tunnetusti myös sisätulon, joten Parsevalin kaavakin on tullut todistetuksi avaruudessa $L_2(\mathbb{R})$. □

13.4. $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-distribuutioiden Fourier-muunnos.

On aika määritellä distribuutioiden Fourier-muunnos.

Määritelmä 13.21. Hitaasti kasvavan distribuution $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ Fourier-muunnos määritellään yhtälöllä

$$\langle \varphi, \hat{\Lambda} \rangle = \langle \hat{\varphi}, \Lambda \rangle,$$

toisin sanoen distribuutioiden Fourier-muunnos on testifunktioiden Fourier-muunnoksen topologinen transpoosi.

Esimerkki 13.22. Olemme kohdassa 13.7 todenneet, että hitaasti kasvavilla distribuutioilla on olennaisesti samat laskennalliset ominaisuudet kuin funktioilla, esimerkiksi derivointi, kertominen polynomilla. ja kertominen nopeasti vähenevällä funktiolla ovat jatkuvia lineaarikuvauksia $\mathcal{S}(\mathbb{R})^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. Nyt todetaan, että myös hitaasti kasvavien distribuutioiden Fourier-muunnoksella on olellisesti samat laskennalliset ominaisuudet kuin funktioiden Fourier-muunnoksella.

Lause 13.23. *Hitaasti kasvavilla distribuutioilla ja niiden Fourier-muunnoksella* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R})^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R})^* : \Lambda \mapsto \hat{\Lambda}$. *on seuraavat laskennalliset ominaisuudet:*
Kaikilla $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*, \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R})$ *on*

a) $\Lambda_{\hat{f}} = (\Lambda_f)\hat{}$, *eli* $\Lambda_{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}(\Lambda_f)$, *kuten sopii odottaakin, erityisesti:*
b) $\hat{1} = \delta_0$ *ja* $\hat{\delta}_0 = 1$ *eli* $\mathcal{F}1 = \delta_0$ *ja* $\mathcal{F}\delta_0 = 1$
c) $\mathcal{F}$ *on lineaarinen homeomorfismi* $\mathcal{S}(\mathbb{R})^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$.
d) $\mathcal{F}^4$ *on identtinen kuvaus, ts.* $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$.
e) $(D\Lambda)\hat{} = it\hat{\Lambda}$ *ja* $(x\Lambda)\hat{} = -D\hat{\Lambda}$ *eli* $\mathcal{F}(D\Lambda) = it\mathcal{F}\Lambda$ *ja* $\mathcal{F}(x\Lambda) = -D\mathcal{F}\Lambda$
f) **(Inversiokaava)** $(\hat{\Lambda})\hat{} = \tilde{\Lambda}$, *eli* $(\mathcal{F})^2\Lambda = \tilde{\Lambda}$, *missä* $\langle \varphi, \tilde{\Lambda} \rangle = \langle \tilde{\varphi}, \Lambda \rangle$.

Todistus. (a) $(\Lambda_f)\hat{}(\phi) = \Lambda_f(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}} f\hat{\phi} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\phi = (\Lambda_{\hat{f}})(\phi)$.

(b) $\langle \phi, 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi \, dm$, joten $\langle \phi, \hat{1} \rangle = \langle \hat{\phi}, 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} \, dm = \phi(0) = \langle \phi, \delta_0 \rangle$. Toiset yhtälöt todistetaan vastaavasti.

(c) seuraa lauseesta 10.11, sillä $\mathcal{F}$ on lineaarisen homeomorfismin transpoosi.

(d), (e) ja (f) seuraavat heti määritelmästä ja siitä, että nopeasti vähenevien funktioiden Fourier- muunnoksella on vastaava ominaisuus. □

Määritelmä 13.24. Hitaasti kasvavan distribuution ja nopeasti vähenevän funktion konvoluutio määritellään yhtälöllä

$$(\varphi * \Lambda)(x) = \langle \tau_x(\tilde{\varphi}), \Lambda \rangle,$$

joka tietenkin yhtyy aikaisempaan määritelmään 12.6, jos $\Lambda = \Lambda_f$ on kompaktikantajainen testifunktio.

Seuraava lemma on tarpeen hitaasti kasvavien distribuutioiden konvoluutioiden derivoimiseksi. Todistus perustuu tietoihin Fourier-muunnoksesta:

Lemma 13.25. *Derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo myös nopeasti vähenevien funktioiden avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, ts. kaikilla $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} - D\varphi(x) = 0$$

avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa.

Todistus. Koska Fourier-muunnos on avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa homeomorfismi, riittää todistaa, että avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}\left(\frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} - D\varphi(x) \right) = 0$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\mathcal{F}\varphi(x+\varepsilon) - \mathcal{F}\varphi(x)}{\varepsilon} - \mathcal{F}D\varphi(x) \right) = 0$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+\varepsilon) e^{-itx} \, dm - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-itx} \, dm}{\varepsilon} - it\hat{\varphi}(t) \right) = 0$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-it(x-\varepsilon)} \, dm - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-itx} \, dm}{\varepsilon} - it\hat{\varphi}(t) \right) = 0$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-itx} \, dm(x) - it\hat{\varphi}(t) \right) = 0$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} \hat{\varphi}(t) - it\hat{\varphi}(t) \right) = 0$$

eli

$$\left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} - it \right) \hat{\varphi}(t) \to 0.$$

Tiedossa on, että $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Millä tahansa luvulla $k \in \mathbb{N}$ ja polynomilla - erityisesti jokaisella polynomilla $P(t) = (1+t^2)^N$, on

$$P(t) \cdot D^k \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} \, \hat{\varphi}(t) - it \right) = P(t) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} - it \right) \, D^{k-j} \hat{\varphi}(t) \right).$$

Laskemalla derivaatta huomataan, että

$$D^j \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} - it \right) = \begin{cases} \frac{e^{i\varepsilon t}-1}{\varepsilon} - it, \text{ kun } j = 0 \\ \frac{i\varepsilon e^{i\varepsilon t}}{\varepsilon} - i = ie^{i\varepsilon t} - i = (e^{i\varepsilon t} - 1)i, \text{ kun } j = 1 \\ i^k \varepsilon^{j-1} e^{i\varepsilon t}, \text{ kun } j \geq 2 \end{cases}$$

joten kaikilla[79] j

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| D^j \left(\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} - it \right) \right| = 0$$

Koska $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin $\sup_{\mathbb{R}} |P(t) D^{k-j} \hat{\varphi}(t)| < \infty$ kaikilla $j = 0, \dots k$, joten konvergenssi avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa on todistettu. $\square$

Lause 13.26. *Hitaasti kasvavien distribuutioiden konvoluutiolla ja Fourier-muunnoksella on seuraavat laskennalliset ominaisuudet: (kaikilla $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*, \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R})$)*

a) $\Lambda \hat{*} \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *ja* $D(\Lambda \hat{*} \varphi) = (D\Lambda) \hat{*} \varphi = \Lambda \hat{*} (D\varphi)$.
b) $\Lambda \hat{*} \varphi$ *on hitaasti kasvava distribuutio, itse asiassa polynomiaalisesti kasvava funktio.*
c) $(\mathbf{\Lambda} \hat{*} \varphi)\hat{} = \hat{\varphi}\hat{\mathbf{\Lambda}}$.
d) $(\Lambda \hat{*} \varphi) \hat{*} \psi = \Lambda \hat{*} (\varphi \hat{*} \psi)$.
e) $\hat{\Lambda} \hat{*} \hat{\varphi} = (\varphi\Lambda)\hat{}$.

Todistus. (a) Differentioituvuus ja yhtälö $(D\Lambda) \hat{*} \varphi = \Lambda \hat{*} (D\varphi)$ todistetaan kuten vastaava kaava 12.8 Schwartzin distribuution ja funktion konvoluutiolle; olennaista on konvoluution ja siirron kommutointi. Samalla tavalla saadaan

$$\left(\frac{\tau_{-\varepsilon} - \tau_0}{\varepsilon} \right) (\Lambda \hat{*} \varphi) = \Lambda \hat{*} \left(\frac{\tau_{-\varepsilon} - \tau_0}{\varepsilon} \right) \varphi.$$

Nyt vedotaan lemmaan 13.25 ja saadaan

$$D(\Lambda \hat{*} \varphi) = \Lambda \hat{*} (D\varphi).$$

(b) On osoitettava, että kaikille $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ ja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ ja vakio $C = C_{\Lambda,\varphi}$ siten, että

$$|(\Lambda \hat{*} \varphi)(x)| \leq C(1+x^2)^N.$$

Koska $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$, niin kaikille $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|\langle \varphi, \Lambda \rangle| \leq C_1 \|\varphi\|_N$$

jollain $C_1 > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$. Siis

$$|(\Lambda \hat{*} \varphi)(x)| = |\langle \tau_x \tilde{\varphi}, \Lambda \rangle| \leq C_1 \|\tau_x \tilde{\varphi}\|_N.$$

[79] Ainoastaan tapaukset $j = 0$ ja $j = 1$ teettivät hiukan päänvaivaa. Käytin sarjakehitelmää ja Leibnitzin kriteeriä.

Väite seuraa nyt siitä, että

$$\|\tau_x\tilde{\varphi}\|_N = \sup_{t\in\mathbb{R}}(1+t^2)^N|D^N\tau_x\tilde{\varphi}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}}(1+t^2)^N|D^N\varphi(x-t)| \le 2(1+x^2)^N\|\varphi\|_N.$$

(c) Koska (b):n mukaan $\Lambda \hat{*} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin on olemassa Fourier-muunnos $\mathcal{F}(\Lambda \hat{*} \varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. Koska $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on tiheässä avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin myös $\{\hat{\psi} \mid \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ on tiheässä avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, joten riittää todistaa

$$\langle \hat{\psi}, (\boldsymbol{\Lambda} \hat{*} \varphi)\hat{}\,\rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\varphi}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\rangle$$

kaikille $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tämä on suora lasku; ψ:n kompaktia kantajaa tarvitaan integraalimerkin siirrossa hakasulkeisiin: (Vrt. 12.2)

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}, (\Lambda \hat{*} \varphi)\hat{}\,\rangle &= \langle \tilde{\psi}, (\Lambda \hat{*} \varphi)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(-x)(\Lambda \hat{*} \varphi)(x)\, dm(x) \\
&= \int_{-K} \psi(-x)\langle \tau_x\tilde{\varphi}, \Lambda\rangle\, dm(x) \\
&= \int_{-K} \langle \psi(-x)\tau_x\tilde{\varphi}, \Lambda\rangle\, dm(x) \\
&= \Big\langle \int_{-K} \psi(-x)\tau_x\tilde{\varphi}\, dm(x), \Lambda\Big\rangle \\
&= \langle (\varphi \hat{*} \psi)\tilde{}\,, \Lambda\rangle \\
&= \langle (\varphi \hat{*} \psi)\hat{}\,, \hat{\Lambda}\rangle \\
&= \langle \hat{\varphi}\hat{\psi}, \hat{\Lambda}\rangle \\
&= \langle \hat{\psi}, \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\rangle \qquad \square
\end{aligned}$$

(d) Kohdan (b) mukaan myös kaikille $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pätee $\langle \hat{\psi}, (\Lambda \hat{*} \varphi)\hat{}\,\rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\rangle$, joten edellisessä laskelmassa kaikki termit ovat yhtä suuria myös, kun $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Erityisesti

$$\langle \tilde{\psi}, (\Lambda \hat{*} \varphi)\rangle = \langle (\varphi \hat{*} \psi)\tilde{}\,, \Lambda\rangle$$

eli

$$((\Lambda \hat{*} \varphi) \hat{*} \psi)(0) = (\Lambda \hat{*} (\varphi \hat{*} \psi))(0),$$

joka on (c) kohdassa 0. Yleinen tapaus saadaan siirrolla eli korvaamalla ψ funktiolla $\tau_x\psi$.

(e) $(\hat{\Lambda} \hat{*} \hat{\varphi})\hat{}\, = \tilde{\varphi}\tilde{\Lambda} = (\varphi\Lambda)\tilde{}\, = ((\varphi\Lambda)\hat{}\,)\hat{}\,$. (Tässä on merkitty $\langle \varphi, \tilde{\Lambda}\rangle = \langle \hat{\varphi}, \Lambda\rangle$.)

14. Sovellus osittaisdiffentiaaliyhtälöiden ratkomiseen

Huomautus 14.1. Sobolevin avaruuksia on lyhyesti käsitelty funktionaalianalyysin monisteessa [1]. Tässä pääkohdat:

14.1. **Sobolevin avaruudet.**

Huomautus 14.2. Lebesgue'in avaruudet ovat jatkuvien funktioiden avaruuden $\mathcal{C}[a,b]$ täydentymiä $\|\cdot\|_p$-normien suhteen. Analyysin tarpeisiin niissä on se vika, että derivaattaa ei ole määritelty edes lähtökohtana olevassa avaruudessa $\mathcal{C}[a,b]$. Tämä antaa aiheen tarkastella avaruuden $\mathcal{C}[a,b]$ täydentymän sijasta jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruuden $\mathcal{C}^1[a,b]$ täydentymää, normina

$$\|f\|_{p,\mathcal{C}^1} = \|f\|_p + \|f'\|_p,$$

missä $1 \le p \le \infty$.

Kuten Lebesgue'in avaruuksien tapauksessa nytkin tapaus $p = \infty$ on käsiteltävä eri tavalla, sillä $\|f\|_{p,\mathcal{C}^1}$ antaa tasaisen suppenemisen sekä funktiolle että derivaatalle ja tekee avaruudesta $\mathcal{C}^1$ täydellisen täydentämättäkin[80]. Tämä heijastuu myös joihinkin tapauksen $p = 1$ käsittelyssä tuleviin hankaluuksiin.

Ylempiä derivaattoja voi ottaa huomioon lähtemällä avaruudesta $\mathcal{C}^n[a,b]$ ja ottamalla normin lausekkeeseen kaikki derivaatat. Analyysin kirjoissa tarkastellaan sitä paitsi yleensä usean muuttujan funktioiden avaruuksia.

Seuraavassa esitellään perustapauksesta $\mathcal{C}^1[a,b]$ täydentämällä syntyvät *Sobolevin avaruudet* $W_p = W^{1,p}(]a,b[) = H^{1,p}(]a,b[) \quad (1 \le p < \infty)$. Osoittautuu, että ne voi realisoida seuraavalla tavalla. Merkitään kompaktikantajaisten $\mathcal{C}^1$-funktioiden aliavaruutta $\mathcal{C}^1_c$.

Määritelmä 14.3. Olkoon $1 \le p < \infty$. Määritellään

$$W^{1,p}(]a,b[) = \Big\{ f \in L^p[a,b] \;\Big|\; \exists u \in L^p[a,b] \text{ se. } \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[) : \int_a^b \varphi u = -\int_a^b \varphi' f \Big\}.$$

Funktio $u \in L^p[a,b]$ on funktion f *distribuutioderivaatta*, *heikko derivaatta* eli *derivaatta*.

Huomautus 14.4. Sobolevin avaruudessa on siis funktioita, joiden **distribuutioderivaatta on säännöllinen**.

Huomautus 14.5. Osittaisintegroinnin avulla huomaa, että jatkuvasti derivoituvan funktion f distribuutioderivaataksi kelpaa sen tavallinen derivaatta. Tämä antaa aiheen merkitä $u = f'$ yleisessäkin tapauksessa, etenkin kun alkio $u \in L^p[a,b]$ määräytyy yksikäsitteisesti derivaatan määrittelevästä ehdosta $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[) : \int_a^b \varphi u = -\int_a^b \varphi' f$.

Huomautus 14.6. Sobolevin avaruus $W^{1,p}$ on pisteittäisin laskutoimituksin vektoriavaruus. Normi $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$ tekee siitä Banachin avaruuden ja derivoinnista $f \mapsto f'$ jatkuvan lineaarikuvauksen $W^{1,p} \to L^p$.

Perustelu. Ei kovinkaan vaikeaa, mutta tylsää laskentoa.

Huomautus 14.7. Sobolevin avaruuden $W^{1,p}$ alkiot ovat luonnollisen normin mielessä likimain samoja kuin jatkuvasti derivoituvat funktiot. Päätulos on, että $\mathcal{C}^1[a,b]$ on isometrisen isomorfismin tarkkuudella Sobolevin avaruuden $W^{1,p}$ aliavaruus ja lisäksi tiheä, ts. $W^{1,p}$ on sen täydentymä. Tämä ei ole itsestään selvää. Historiallisesti

[80] Tapauksessa $p = \infty$ saadaan itse asiassa Lipschitz-jatkuvien funktioiden avaruus.

on jopa niin, että alun perin määriteltiin erikseen toisaalta avaruus $W^{1,p}$ ja toisaalta täydentämällä syntyvä avaruus $H^{1,p}$; näiden samuuden todistaminen oli aikanaan merkittävä tutkimustulos. Hahmottelemme alla pääkohdat.

Määritelmä 14.8. Olkoot $1 \le p < \infty$. Määritellään:

$$\mathcal{C}^1_p(]a,b[) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^1(]a,b[) \;\Big|\; f \text{ ja } f' \in L^p[a,b] \Big\} \text{ ja}$$
$$H^{1,p}(]a,b[) = \mathcal{C}^1_p(]a,b[) : \text{n täydentymä normissa } \|\cdot\|_{1,p}.$$

Lause 14.9. *Olkoon $f \in L^p[a,b]$. Tällöin $f \in H^{1,p}(]a,b[)$, jos ja vain jos on olemassa avaruuden $\mathcal{C}^1_p(]a,b[)$ Cauchy-jono g_j, jolla $\|g_j - f\|_p \to 0$.*

Lause 14.10. $H^{1,p}(]a,b[) \subset W^{1,p}(]a,b[)$ *normialiavaruutena.*

Todistus. Perustelu Olkoon $f \in H^{1,p}(]a,b[)$ ja $(g_j)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1_p(]a,b[)$ Cauchy-jono, jolla $g_j \to f$. Derivaattojen jono $(g'_j)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p[a,b]$ on Cauchy-jono, siis suppenee, ja on analyysin rutiinia todeta, että sen rajafunktio kelpaa f:n derivaataksi. □

Lause 14.11. (Friedrichs, Deny ja Lions (1953-54), Meyers ja Serrin[81] 1964) $H^{1,p}(]a,b[) = W^{1,p}(]a,b[)$ *normialiavaruutena.*

Perustelu. Muutaman sivun mittainen todistus löytyy reaalianalyysin oppikirjoista. Työvaiheita ovat siirtyminen kompaktikantajaisiin funktioihin, silotukset sekä reaalifunktioiden perusominaisuuksien, kuten Urysohnin lemman ja ykkösen $\mathcal{C}^\infty$-ositusten käyttö. □

14.2. **Sobolevin lemma.** Seuraava lause koskee useampiulotteista avaruutta[82]

Määritelmä 14.12. (1) Avoimessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ määritelty funktio f on *lokaalisti L^2 funktio*, jos $\int_K f^2\,dx$ on olemassa kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$.

(2) Lokaalisti L^2 funktiota g vastaava säännöllinen distribuutio $\Lambda_g\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ on *lokaalisti L^2 distribuutio*.

Sobolevin avaruuteen kuuluva funktio on *lokaalisti L^2-derivoituva*, jos sen distribuutioderivaatta on lokaalisti L^2 funktio.

Lause 14.13. *Olkoot n, p, $r \in \mathbb{N}$ $n > 0, p \ge 0$, $r > p + \frac{n}{2}$. Olkoon f funktio, jonka ensimmäiset r distribuutio-osittaisderivaattaa $f, D_j f, \ldots, D^r_j f$ jokaisen akselin x_j suuntaan ovat lokaalisti L^2 distribuutioita. Huomaa: Oletus koskee vain kaikkia puhtaasti akselien suuntaisia derivointeja, ei "sekatermejä".*

Silloin on olemassa melkein kaikkialla funktioon f yhtyvä $\mathcal{C}^p(\Omega)$-funktio (Huomaa p!). Sillä on klassisessa mielessä olemassa samat derivaatat kertalukuun p asti.

Funktio f voidaan siis korjata näin säännölliseksi muuttamalla sen arvoja nollamittaisessa joukossa.

Erityisesti, jos f:llä kaikki derivaatat ovat lokaalisti L^2, niin f "on" $\mathcal{C}^\infty$-funktio.

Todistus. Ks esim [3]. Todistus käyttää tietojamme Fourier-muunnoksesta.

---

[81]Kurt Otto Friedrichs 1901–1982, Saksa-USA. J.Deny, Ranska. J.L. Lions 1928–2001, Ranska. Norman G. Meyers, USA. James Serrin 1926– 2012, USA.

[82]johon kaikki tähän asti sanomamme vaivattomasti yleistyy!

14.3. **Katsaus osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perusratkaisuihin.**

Määritelmä 14.14. Tarkastellaan *yleistä lineaarista vakiokertoimista osittaisdifferentiaaliyhtälöä*
$$P(D)\Lambda = v.$$
Vastaava *homogeeninen yhtälö* on
$$P(D)\Lambda = 0$$
ja vastaava *perusyhtälö* on
$$P(D)\Lambda = \delta_0.$$

Seuraavassa osoitetaan, että perusyhtälöllä on ratkaisu — ja se on hyödyllinen yleisenkin yhtälön ratkaisemiseksi.

Huomautus 14.15. (Hyöty) Jos perusyhtälön oikealla puolella on kompaktikantajainen distribuutio tai funktio v, ja E on perusyhtälön ratkaisu eli *perusratkaisu*, niin $\Lambda = E * v$ on yleisen yhtälön ratkaisu.

Todistus.
$$P(D)(E * v) = (P(D)E) * v = \delta_0 * v = v.$$
□

Seuraus 14.16. *Jos $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, niin ratkaisu $\Lambda = E * v$ on $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$-funktio.*

Todistus. Selvä.

Määritelmä 14.17. Merkitään n-ulotteista *torusta* $T^n = \{(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}) \mid \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}\} = {S_1}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Lause 14.18. *Olkoon P usean muuttujan (n kpl.) polynomi, ja $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ kompaktikantajainen. Silloin yhtälöllä*
$$P(D)\Lambda = v$$
on **kompaktikantajainen** *ratkaisu, jos ja vain jos on olemassa* **kokonainen funktio** *$g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, jolla*
$$Pg = \hat{v}.$$

Ratkaisu on yksikäsitteinen ja sen kantaja sisältyy supp v*:n konveksiin verhoon.*

Lause 14.19. *Olkoon P usean muuttujan (n kpl.) (tasan) asteen N polynomi. Silloin perusyhtälöllä*
$$P(D)\Lambda = \delta_0$$
on olemassa ratkaisu Λ, jolle lisäksi pätee kaikilla $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $r > 0$
$$|\langle \psi, \Lambda \rangle| \le C r^{-N} \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t + rw)|\, dm_n(t)\, dm_{T^n}(w),$$
missä dm_{T^n} on toruksen luonnollinen (Haarin) mitta eli kulmien/kaarenpituuden tulomitta.

Harjoitustehtäviä ja niiden ratkaisuja

0.0.1. *Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ filtterikantoja joukossa E.*
a) Onko $\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?
b) Onko $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?

Ratkaisu: a) Filtterikanta-aksioomat 1.20 c) toteutuvat, sillä ensimmäinen on itsestään selvä ja ja toinen saadaan huomaamalla, että

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B') \supset (A \cap A') \cup (B \cap B') \supset A'' \cup B''.$$

b) Ei aina ole, vaan se voi sisältää tyhjän joukon.

0.0.2. *Osoita, että topologinen vektoriavaruus E on yhtenäinen.*

Ratkaisu: Osoitetaan E polkuyhtenäiseksi: Olkoot $x, y \in E$. Kuvaus $\gamma : [0.1] \to E : t \mapsto ty + (1-t)x$ on jatkuva, $\gamma(0) = x$ ja $\gamma(1) = y$. (Vertailun vuoksi: Topologinen ryhmä voi olla epäyhtenäinen. Esimerkiksi käy äärellinen diskreetti ryhmä.)

0.0.3. *Osoita, että topologisessa vektoriavaruudessa E pätee $\overline{\{0\}} = \bigcap \mathcal{U}_0$ ja että $\bigcap \mathcal{U}_0$ on E:n vektorialiavaruus.*

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
x \in \overline{\{0\}} &\iff 0 \in U \ \forall U \in \mathcal{U}_x \\
&\iff 0 \in x + V \ \forall V \in \mathcal{U}_0 \\
&\iff x \in -V \ \forall V \in \mathcal{U}_0 \\
&\iff x \in V \ \forall V \in \mathcal{U}_0 \text{ (homotetiainvarianssi)} \\
&\iff x \in \bigcap \mathcal{U}_0
\end{aligned}$$

Toinen väite saadaan joko seuraavan tehtävän 0.0.4 seurauksena tai suoraan:

1°) $0 \in \overline{\{0\}}$.

2°) $x \in \overline{\{0\}} = \bigcap \mathcal{U}_0 \iff x \in V \quad \forall V \in \mathcal{U}_0$
$\iff \lambda x \in \lambda V \quad \forall V \in \mathcal{U}_0, \lambda \neq 0$
$\iff \lambda x \in U \ \forall U \in \mathcal{U}_0, \lambda \neq 0$ (homotetiainvarianssi)
$\iff \lambda x \in \overline{\{0\}} \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$. (Tapaus $\lambda = 0$ on triviaali.)

3°) $x, y \in \overline{\{0\}} \iff x, y \in U \quad \forall U \in \mathcal{U}_0$.
Olkoon $U \in \mathcal{U}_0$. Valitaan $V \in \mathcal{U}_0$ siten, että $V + V \subset U$.
$x + y \in V + V \subset U$. $\square$

0.0.4. *Osoita, että topologisen vektoriavaruuden E vektorialiavaruuden $F \subset E$ sulkeuma $\overline{F}$ on vektorialiavaruus.*

Ratkaisu: Ainakin $0 \subset F \subset \overline{F}$. Tunnetusti kuvaus f on jatkuva aina ja vain, kun $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ kaikilla A, ja että tulotopologissa $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$. Kertolaskun jatkuvuuden nojalla jokainen $\lambda\cdot : E \to E : x \mapsto \lambda x$ on jatkuva, joten koska $\lambda \cdot F \subset F$, niin $\lambda \cdot \overline{F} \subset \overline{\lambda \cdot F} \subset \overline{F}$. Koska yhteenlasku $+ : E \times E \to E$ on jatkuva, niin $\overline{F} + \overline{F} = +(\overline{F} \times \overline{F}) = +(\overline{F \times F}) \subset \overline{+(F \times F)} \subset \overline{F}$. $\square$

0.0.5. *Todista huomautuksen 1.11 väite:* $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\alpha|\le 1} \alpha A$.

0.0.6. *Onko avoimen joukon $A \subset E$ balansoitu verho* $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\alpha|\le 1} \alpha A$ *aina avoin joukko?*

Ratkaisu: Ei. Normiavaruudessa $\mathbb{R}^2$ joukon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ balansoitu verho on $A \cup \{0\}$.

Mutta jos origo jo kuuluu avoimeen joukkoon A, niin silloin $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\alpha|\le 1} \alpha A$ on avoin joukko, koska silloin $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\lambda|\le 1} \lambda A = \bigcup_{0\neq|\lambda|\le 1} \lambda A$ ja jälkimmäisessä jokainen λA on avoin.

0.0.7. *Todista määritelmän 1.13 yhteydessä esitetty väite, että joukon A konveksi verho on* $\operatorname{co} A = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i |\; n \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, 0 \le \alpha_i \le 1,\, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$.

0.0.8. *Todista oikeaksi seurauksen 1.4 tasaisuusehto lineaarikuvauksen jatkuvuudelle.*

0.0.9. *Todista oikeaksi seurauksen 1.5 ehto kuvauksen avoimuudelle.*

0.0.10. *Perustele huomautus 1.21 osoittamalla, että*

a) topologisessa avaruudessa X pisteiden ympäristöillä on seuraavat ominaisuudet,

Y1) Piste kuuluu jokaiseen ympäristöönsä: $U \in \mathcal{U}_x \implies x \in U$.

Y2) Ympäristö sisältää avoimen ympäristön: $U \in \mathcal{U}_x \implies \exists V \in \mathcal{U}_x$ *siten, että kaikilla* $y \in V$ *on* $V \in \mathcal{U}_y$.

b) nämä kaksi ehtoa takaavat, että filtterit $\mathcal{U}_x$ ovat ympäristöfiltterit jossain joukon X topologiassa τ.

Vihje: a) Helppo.

b) Valitse $\tau = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{U}_x \text{ kaikille } x \in A\}$.

0.0.11. *Perustele huomautuksen 1.25 väitteet: a) Topologisessa avaruudessa alkeisfiltteri suppenee kohti pistettä x tasan silloin, kun vastaava jono suppenee kohti pistettä x.*

b) Topologisessa avaruudessa piste x kuuluu osajoukon A sulkeumaan tasan silloin, kun on olemassa joukon A osajoukoista muodostuva filtterikanta, joka suppenee kohti pistettä x.

c) Yleisessä topologisessa avaruudessa ei välttämättä ole pistettä $x \in \overline{A}$ kohti suppenevaa joukon A jonoa.

0.0.12. *Topologinen ryhmä. Muodostetaan vektoriavaruuteen $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ siirtoinvariantti topologia $\mathcal{T}$ seuraavalla tavalla: Jokaiseen aidosti positiiviseen funktioon $m \in E$ (siis $m(t) > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$) liitetään joukko*

$$V_m = \{f \in E \mid |f(t)| \le m(t)\, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

ja vaaditaan, että filtteri

$$\mathcal{F} = \{V_m \mid m \in E \text{ ja } m \text{ aidosti positiivinen}\}$$

on origon ympäristökanta.

a) Totea, että tällainen topologia $\mathcal{T}$ on olemassa.

b) Totea, että yhteenlasku on $\mathcal{T}$-jatkuva (ja E siis topologinen abelin ryhmä).

c) Onko $(E, \mathcal{T})$ *topologinen vektoriavaruus?*

d) Indusoiko topologia $\mathcal{T}$ *aliavaruuteen* $E = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f$ *on kompakti*$\}$ *vektoriavaruustopologian?*

e) Onko E *tässä topologiassa metrisoituva?*

Ratkaisu: a) Ainoa ehdokas topologiaksi on ilmeinen, pisteen x ympäristökannaksi on valittava $x + \mathcal{F}$. Tämä on järkevää, sillä $\mathcal{F}$ toteuttaa filtterikanta-aksioomat (Leikkausta tutkiessa valitse $m'' = \min(m, m')$) ja jokainen V_m sisältää origon eli nollafunktion. Myös tehtävän 0.0.10 ehtot Y1 ja Y2 toteutuvat.

b) Summan jatkuvuuden toteamiseksi riittää huomata, että

$$(x + \tfrac{1}{2}V_m) + (y + \tfrac{1}{2}V_m) \subset (x + y) + V_m.$$

c) Ei ole. Tulon epäjatkuvuus saadaan vastaesimerkistä $f(t) = e^t$. Tällä vektorilla $f \in E$ ei tulon osittaiskuvaus $\lambda \mapsto \lambda f$ ole jatkuva $\mathbb{R} \to E$, sillä jos valitaan m:ksi vakiokuvaus 1, niin $|\lambda f(t) - f(t)| = |\lambda - 1|e^t$, joka ei ole ympäristössä V_m ellei λ ole 1.

d) Aliavaruustopologialla varustetussa joukossa $E = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f$ on kompakti$\}$ yhteenlasku on tietenkin edelleen jatkuva. Myös kertolasku $\mathbb{R} \times E \to E$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $(\mu, f) \in \mathbb{R} \times E$: Olkoon W pisteen $\mu f \in E$ kantaympäristö, toisin sanoen $W = \mu f + V_m$ jollekin aidosti positiiviselle $m \in E$. Tehtävänä on löytää luvun λ ympäristö $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ ja vektorin $f \in E$ kantaympäristö $f + V_{m'}$ siten, että $cg \in W$ kaikille $c \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ ja $g \in f + V_{m'}$.

On siis tarkasteltava lukua c, jolla $|c - \lambda| < \varepsilon$ ja funktiota g, jolla $g - f \in V_{m'}$ eli $|g - f| < m'$ kaikissa pisteissä $t \in \mathbb{R}$. Näiden tulolle pätee kaikissa pisteissä t

$$\begin{aligned} |cg - \lambda f| &= |cg - cf + cf - \lambda f| \leq |cg - cf| + |cf - \lambda f| \leq |c||g - f| + |c - \lambda||f| \\ &< |c|m' + \varepsilon|f| < |c|m' + \varepsilon \max|f| \end{aligned}$$

Mikään ei estä valitsemasta lukua ε pienemmäksi kuin $\frac{1}{2}$ eikä funktiota m' pienemmäksi kuin $\frac{m}{2(|\lambda|+1)}$, jolloin kaikissa pisteissä t on $|c|m' < \frac{m}{2}$. Luku ε voidaan lisäksi valita pienemmäksi kuin $\frac{1}{2}\frac{1}{\max|f|}\min_{\operatorname{supp} f} m$, jolloin myös $\varepsilon \max|f| < \frac{m}{2}$ kaikissa pisteissä ja siis $cg \in \lambda f + V_m$.

e) E ei ole metrisoituva, sillä sen origolla ei ole numeroituvaa ympäristökantaa. Jos sellainen olisi vaikkapa $\{V_{m_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, niin valittaisiin $m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ siten, että $m(t) > 0\ \forall t$ ja $m(k) < m_k(k)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Nyt ei olisi olemassa sellaista V_{m_k}, että $V_{m_k} \subset V_m$. (Vertaa Cantorin diagonaalimenetelmään, jolla todistetaan, että $\mathbb{R}$ ei ole numeroituva.)

0.0.13. *Todista oikeiksi kohdan 1.14 väitteet konvekseista joukoista.*

0.0.14. *Viimeistele lauseen 1.29 todistus näyttämällä, että jos* $f : E \to \mathbb{K}$ *on topologisen vektoriavaruuden* E *lineaarimuoto, niin*

(1) f *on jatkuva, jos ja vain jos* $\operatorname{Ker} f$ *on suljettu,*
(2) *muuten* $\operatorname{Ker} f$ *on* E*:n aito, tiheä aliavaruus.*

0.0.15. *Onko balansoidun joukon kuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon kuvan laita?*

Vihje: Balansoidun joukon lineaarinen kuva on balansoitu, absorboivan joukon jatkuva lineaarinen kuva ei välttämättä ole absorboiva, vastaesimerkkinä koko avaruuden kuva upotuksessa $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Konveksin joukon lineaarinen kuva on konveksi, suljetun joukon jatkuvakaan lineaarinen kuva ei aina ole suljettu, vastaesimerkkinä koko avaruuden kuva tiheän (normi)aliavaruuden upotuksessa koko avaruuteen. Kompaktin joukon kuva on kompakti, kunhan kuvaus on jatkuva.

0.0.16. *Onko balansoidun joukon alkukuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon alkukuvan laita?*

Vihje: Muut väitteet ovat tosia, mutta kompaktin joukon alkukuva ei aina ole kompakti, vastaesimerkkinä vakiokuvaus $\mathbb{R} \to \{0\}$.

0.0.17. *Todista lause 3.2, jonka mukaan topologisessa vektoriavaruudessa:*

(1) *Konveksi joukko on polkuyhtenäinen, siis myös yhtenäinen.*
(2) *Konveksin joukon sisäpisteen ja kosketuspisteen välinen "avoin jana" sisältyy joukon sisukseen.*

0.0.18. *a) Konstruoi esimerkki konveksista joukosta, jonka balansoitu verho ei ole konveksi.*

b) Onko konveksi joukko $A \subset E$ balansoitu, jos $\lambda A \subset A$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$, joille $|\lambda| = 1$?

Ratkaisu: a) Origon kautta kulkematon jana $\mathbb{R}^2$:ssa.

b) On. Olkoon $|\mu| \leq 1$ ja $x \in A$. Osoitetaan, että $\mu x \in A$. Oletuksen mukaan $-x \in A$, joten konveksiuden nojalla $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$. Väite $\mu x \in A$ pätee siis, kun $\mu = 0$. Edelleen konveksiuden nojalla $\mu x = (1 - |\mu|) \cdot 0 + |\mu| x \in A$. Oletuksen mukaan siis $\mu x = \frac{\mu}{|\mu|}|\mu| x \in A$, kun $\mu \neq 0$.

0.0.19. *a) Osoita, että kompaktin joukon A balansoitu verho* $\operatorname{bal} A$ *on kompakti.*

b) Konstruoi esimerkki suljetusta joukosta $A \subset \mathbb{R}^2$, jonka konveksi verho ei ole suljettu.

Ratkaisu: a) $\operatorname{bal} A = \bigcup_{\lambda \leq 1} \lambda A = f(\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\} \times A)$, joten $\operatorname{bal} A$ on kahden kompaktin joukon tulon kuva jatkuvassa kuvauksessa!

b) Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ kuvaaja tasossa $\mathbb{R}^2$.

0.0.20. *Osoita, että balansoidun joukon konveksi verho* $\operatorname{co} B$ *on balansoitu.*

0.0.21. *Onko topologisen vektoriavaruuden E osajoukon $A \subset E$ konveksin verhon sulkeuma suppein suljettu, konveksi joukko, joka sisältää alkuperäisen joukon A?*

0.0.22. *Osoita, että suljetut semipallot $\bar{B}_p(0, \varepsilon) = \{x \in E \mid p(x) \leq \varepsilon\}$ ovat suljettuja joukkoja virittämässään E:n lokaalikonveksissa topologiassa. Miten on avointen semipallojen laita?*

0.0.23. *Osoita, että vektoriavaruuden E seminormiperheen $(p_i)_{i\in I}$ supremum $p(x) = \sup_{i\in I} p_i(x)$ on seminormi, kunhan vain $p(x) < \infty$ kaikilla $x \in E$.*

Ratkaisu:

$$p(x+y) = \sup_{i\in I} p_i(x+y) \le \sup_{i\in I}(p_i(x)+p_i(y)) \le \sup_{i\in I} p_i(x) + \sup_{i\in I} p_i(y) = p(x)+p(y)$$
$$p(\lambda x) = \sup_{i\in I} p_i(\lambda x) = \sup |\lambda| p_i(x) = |\lambda| p(x).$$

0.0.24. *Lokaalikonveksissa avaruudessa* jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{J}$ *on joukko $\mathcal{J}$ jatkuvia seminormeja siten, että jokaisella jatkuvalla seminormilla p on olemassa kantaseminormi $q \in \mathcal{J}$ ja luku $\lambda > 0$ siten, että $p \le \lambda q$.*

Osoita, että jos perhe $\mathcal{J}$ on jatkuvien seminormien kanta lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{T})$, niin $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} = \{\varepsilon B_p \mid p \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0\}$ on origon ympäristökanta.

Ratkaisu: Olkoon $\mathcal{N}$ avaruuden $(E, \mathcal{T})$ kaikkien jatkuvien seminormien joukko ja $\mathcal{J}$ avaruuden E jatkuvien seminormien kanta. Merkitään seminormijoukkojen $\mathcal{N}$ ja $\mathcal{J}$ virittämiä origon ympäristöfilttereitä $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ ja $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$. On osoitettava, että $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$. Koska $\mathcal{J}$-seminormit ovat $\mathcal{T}$-jatkuvia, niin $\mathcal{J}$-semipallot ovat $\mathcal{T}$-ympäristöjä, joten $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$. Näytetään, että myös $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$. Koska origon $\mathcal{T}$-ympäristökantajoukot ovat $\mathcal{N}$-semipallojen λB_q äärellisiä leikkauksia, riittää todistaa että jokainen $\mathcal{N}$-yksikkösemipallo B_q on origon $\mathcal{J}$-ympäristö. Seminormit $p \in \mathcal{J}$ muodostavat oletuksen mukaan jatkuvien seminormien kannan, joten kullakin jatkuvalla seminormilla $q \in \mathcal{N}$ on olemassa seminormi $p \in \mathcal{J}$ ja luku $\lambda > 0$ siten, että $q \le \lambda p$, jolloin $B_q \supset B_{\lambda p} = \frac{1}{\lambda} B_p$. Tietysti $\frac{1}{\lambda} B_p$ on $\mathcal{J}$-kantajoukko. Siis $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ ja on näytetty, että $\mathcal{U}_{\mathcal{N}} = \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$. □

0.0.25. *Näytä, että jos lokaalikonveksissa avaruudessa E on yksikin jatkuva normi, niin E:ssä on* jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{N}$, *joka muodostuu normeista.*

Vihje: Olkoon $\mathcal{J}$ jatkuvien seminormien kanta, esimerkiksi kaikkien jatkuvien seminormien joukko. Etsityksi kannaksi kelpaa $\{\max\{n, p\} \mid p \in \mathcal{J}\}$.

0.0.26. *Olkoot $(E, \mathcal{P})$ ja $(F, \mathcal{Q})$ lokaalikonvekseja avaruuksia, missä $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ ovat jatkuvien seminormien kantoja. Osoita, että lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva, jos ja vain jos kaikilla $q \in \mathcal{Q}$ on olemassa $p \in \mathcal{P}$ ja $\lambda > 0$ siten, että $q(Tx) \le \lambda p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

0.0.27. **Lokaalikonveksi avaruus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.** *Jokainen kompakti joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ määrää funktioavaruudessa $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ seminormin $p_K(f) = \sup |f(K)| = \max |f(K)|$. Nämä seminormit määräävät avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$.*

a) Onko $\mathcal{T}$ Hausdorff-topologia?

b) Suppeneeko funktiojono $f_n(x) = \frac{1}{n} e^x$ topologiassa $\mathcal{T}$?

c) Osoita, ettei ole olemassa E:n normia, joka antaisi topologian $\mathcal{T}$. E ei siis ole normeerautuva.

Ratkaisu: a) $\mathcal{T}$ on Hausdorff-topologia. Olkoon nimittäin $f \in E \setminus \{0\}$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja kompakti väli $K \subset \mathbb{R}$, jolla $f(x) > 3\varepsilon$. Nyt $B_{p_K, 0, \varepsilon} \cap B_{p_K, f, \varepsilon} = \emptyset$.

b) Funktiojono $f_n(x) = \frac{1}{n}e^x$ suppenee nollaan: Semipallot $B = \varepsilon B_{p_K}$ muodostavat origon ympäristökannan. Olkoon $B = \varepsilon B_{p_K}$. Nyt $p_K(f_n) = \sup f(K) = \frac{\sup_K(e^x)}{n} \to 0$, joten on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $f_n \in B$, kun $n \geq n_0$.

c) Jos jokin normi $\|\cdot\|$ antaisi saman topologian $\mathcal{T}$, niin $\|\cdot\|$ olisi jatkuva kuvaus, jolloin nollan ympäristön alkukuvana normin $\|\cdot\|$ yksikköpallo sisältäisi origon $\mathcal{T}$-ympäristön, joka puolestaan sisältäisi jonkin semipallon $B = \varepsilon B_{p_K}$, koska nämä semipallot muodostavat origon ympäristökannan. Silloin $p_K(f) < \varepsilon \implies \|f\| \leq 1$ ja siis $p_K(f) < \frac{\varepsilon}{n} \implies \|f\| \leq \frac{1}{n}$, joten $p_K(f_n) \to 0 \implies \|f_n\| \to 0 \implies f_n \to 0$. Mutta millään kompaktilla $K \subset \mathbb{R}$ ei $p_K(f_n) \to 0$ riitä takaamaan, että $f_n \to 0$. Ristiriita. $\square$

0.0.28. **Lokaalikonveksi avaruus $\mathcal{C}^\infty([0,1])$.** *Seminormit* $p_n(f) = \sup_{0\leq t\leq 1} |D^n f(t)|$ $(n = 0,1,2,\dots)$ *määräävät avaruuteen* $E = \mathcal{C}^\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ on ääre*ttömän monta kertaa derivoituva*$\}$ *lokaalikonveksin topologian* $\mathcal{T}$. *Kun* $f \in E$, *merkitään*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

T *on siis lineaarikuvaus (eli operaattori eli transformaatio)* $E \to E$.

a) Onko T *jatkuva?*

b) Onko $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *avaruuden* $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ *jatkuvien seminormien kanta?*

c) Onko topologia $\mathcal{T}$ *normeerautuva?*

Ratkaisu: a) T on jatkuva. Kuvafunktion $g = Tf$ derivaatat ovat tietenkin $Dg = f$, $D^2g = Df, \dots, D^n = D^{n-1}f$. Siten kaikilla $n > 1$ pätee $p_n(Tf) = p_n g = p_{n-1}f$, joten täytyy enää tutkia p_0.

$$p_0(Tf) = \sup|\int_0^x f(t)\,dt| \leq \sup|f| = p_0(f).\text{ OK!}$$

b) On, sillä kaikilla $n \geq 1$ on $p_{n-1}(f) = p_n(Tf) \leq p_n(f)$.

c) Ei normeeraudu. Idea on sama kuin edellisessä tehtävässä. Vastaoletus: Jokin normi $\|\cdot\|$ antaa saman topologian $\mathcal{T}$. Silloin normi $\|\cdot\|$ on jatkuva kuvaus, joten nollan ympäristön alkukuvana normin yksikköpallo $B_{\|.\|}$ sisältää origon $\mathcal{T}$-ympäristön, joka puolestaan sisältää semipallon $B_{\|.\|} \supset \lambda B_{p_n}$. Toisin sanoen jollakin $\mu > 0$ pätee

$$\|\cdot\| \leq \mu p_n.$$

Toisaalta vastaoletettiin, että $\|\cdot\|$ yksinään virittää topologian, jolloin $\{\|\cdot\|\}$ on jatkuvien seminormien kanta (ks. 0.0.24) ja on siis olemassa luku $\lambda > 0$ siten, että $p_{n+1} < \lambda\|\cdot\|$. Yhdistämällä arviot saadaan

$$p_{n+1} < \lambda\|\cdot\| \leq \lambda\mu p_n.$$

Tämän huomaa mahdottomaksi keksimällä jonon $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$, jolla $p_n(f_\alpha) \to 0$, mutta ei $p_{n+1}(f_\alpha) \to 0$. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi $f_\alpha(x) = \alpha^{-n-1}\sin(\alpha x)$, sillä $D^m f_\alpha(x) = \alpha^{-n-1-m} \cdot r(x)$, missä $r(x)$ on rajoitettu funktio, joten $p_n(f_\alpha) = \sup_{[0,1]} |D^n f_\alpha(x)| \to 0$, ja $\alpha \to \infty$, mutta $p_{n+1}(f_\alpha)$ ei lähene nollaa.

Siis $p_n(f_\alpha) \to 0$ mutta ei $p_{n+1}(f_\alpha) \to 0$.

0.0.29. *a) Olkoon E äärettönulotteinen normiavaruus. Näytä, että normikuvaus $x \mapsto \|x\|$ ei ole jatkuva E:n heikon topologian suhteen eli heikosti jatkuva. (Heikon topologian määräävinä seminormeina ovat jatkuvien lineaarimuotojen itseisarvot eli kuvaukset $x \mapsto |\langle x, x^*\rangle|$, missä $x^* \in E^*$.)*

b) Entä onko normi heikossa topologiassa alhaalta puolijatkuva *? Alhaalta puolijatkuvuudelle on riittävää olla jatkuvien kuvausten pisteittäinen supremum.*

Ratkaisu: a) Jos normi $\|\cdot\|$ olisi jatkuva, niin olisi 2.10 mukaan olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja jatkuvat seminormit $|\langle \cdot, x_i^* \rangle|$, (i=1,… n), joilla

$$\|\cdot\| \le \sum_{i=1}^{n} |\langle \cdot, x_i^* \rangle|.$$

Tällöin $x \in \cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, x_i^* \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$, joten lineaarikuvaus $T : E \to \mathbb{K}^n : x \mapsto (\langle x, x_1^*\rangle, \dots, \langle x, x_n^*\rangle)$ olisi injektio ja siis vastoin oletusta $\dim E \le \dim \mathbb{R}^n < \infty$.

b) Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen 3.7 mukaan

$$\|x\| = \sup_{x \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle x, x^* \rangle}{\|x^*\|},$$

joten normi on supremum jatkuvista kuvauksista.

0.0.30. *Olkoon (E, P) lokaalikonveksi avaruus. Osoita, että E:n jono $(x_n)_{\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono, jos ja vain jos $\forall p \in P$ ja $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $q, r \ge n_0 \implies p(x_q - x_r) \le \varepsilon$.*

Ratkaisu: Määritelmän 4.7 mukaan jono $(x_n)_{\mathbb{N}}$ on Cauchy topologisessa vektoriavaruudessa $(E, \mathcal{T})$, jos ja vain jos kaikilla $U \in \mathcal{U}$ on olemassa luku $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n - x_m \in U$ kaikilla $n, m \ge n_0$.

Tehtävän tilanteessa (E, P) on lokaalikonveksi avaruus, joten voi olettaa, että U on kantajoukko ja muotoa $U = \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} B_p$, missä $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ on äärellinen joukko topologian määritteleviä seminormeja. Yllä esitetty Cauchy-jonon määritelmän kohta $x_n - x_m \in U$ saa muodon $p(x_n - x_m) \le \lambda\, \forall p \in \mathcal{H}$.

1) Jos jono on Cauchy ja $p \in P$ ja $\varepsilon > 0$, niin valitaan $\mathcal{H} = \{p\}$ ja $\lambda = \varepsilon$, jolloin määritelmä antaa väitteen.

2) Jos jono toteuttaa tehtävän ehdon ja $U = \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} B_p$, missä $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ on äärellinen, niin valitaan kullekin $p \in \mathcal{H}$ luku n_p siten, että $p(x_n - x_m) \le \lambda\, \forall n, m \ge n_p$. Kun $n, m \ge n_0 = \max\{n_p \mid p \in H\}$, niin siis $p(x_n - x_m) \le \lambda\, \forall n, m \ge n_p$ eli $x \in \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} B_p$.

0.0.31. *Osoita, että metrisoituvan lokaalikonveksin avaruuden jono on Cauchy- jono määritelmän 4.7 mielessä täsmälleen ollessaan Cauchy-jono lauseen 4.5 todistuksessa määritellyn Banachin metriikan d mielessä.*

0.0.32. *Olkoon $E = \prod_{i \in I} E_i$ topologisten vektoriavaruuksien tuloavaruus, jossa tulotopologia. Osoita, a) että $\mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri E:ssä tasan silloin, kun jokaisessa projektiossa $\pi_i : E \to E_i$ kuvafiltteri $\pi_i(\mathcal{F}) \subset E_i$ on Cauchy-filtteri E_i:ssä ja b) että E on täydellinen aina ja vain, kun jokainen E_i on täydellinen.*

Ratkaisu: a) Tulotopologia on hienoin topologia, jossa kaikki projektiokuvaukset $\pi_i : E = \prod_{i\in I} E_i \to E_i : x \mapsto x_i$ ovat jatkuvia. Tietenkin ne ovat lineaarisia surjektioita, joten kannattaakin todistaa hieman yleisempi tulos, jonka mukaan topologisen vektoriavaruuden E Cauchy-filtterin $\mathcal{F}$ kuva jatkuvassa lineaarisessa kuvauksessa $T : E \to F$ on Cauchy-filtteri. Muistetaan, että missä tahansa kuvauksessa filtteriin kuuluvien joukkojen kuvat muodostavat filtterikannan, jonka virittämää filtteriä sanotaan alkuperäisen kuvafiltteriksi. Surjektio antaa suoraan kuvafiltterin. Tarkastamme sille Cauchy-ehdon 4.28. Olkoon siis $U \in \mathcal{U}_F$. Koska $T^{-1}U \in \mathcal{U}_E$, on olemassa $M \in \mathcal{F}$, jolla $M - M \subset T^{-1}U$, jolloin $T(M)$ kuuluu filtterin kuvaan ja $T(M) - T(M) = T(M - M) \subset T(T^{-1}U) \subset U$.

Oletetaan seuraavaksi, että jokainen $\pi_i(\mathcal{F})$ on Cauchy. Olkoon $U \in \mathcal{U}_E$ tulotopologiassa. Voimme olettaa, että U on tulotopologian kantajoukko eli muotoa

$$U = \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i,$$

missä J on äärellinen ja $U_j \in \mathcal{U}_{E_i}$. Valitaan kullakin $j \in J$ joukko $M_j \in \pi_j(\mathcal{F})$, jolla $M_j - M_j \subset U_j$. Kuvafiltterin määritelmän mukaan $M_j \supset \pi_j(N_j)$ jollekin $N_j \in \mathcal{F}$. (Surjektiivisuuden vuoksi voisi vaatia jopa $M_j = \pi_j(N_j)$.) Valitaan

$$N = \prod_{j\in J} N_j \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(\pi_j(N_j)).$$

Tällöin tietenkin $N + N \subset U$, joten on enää näytettävä, että $N \in \mathcal{F}$. Huomataan, että

$$N = \bigcap_{j\in J} \pi^{-1}(\pi(N_j)) \supset \bigcap_{j\in J} N_j$$

ja muistetaan, että jokainen N_j kuuluu alkuperäiseen filtteriin $\mathcal{F}$ ja että filtteri sisältää joukkojensa äärelliset leikkaukset ja ylijoukot. Selvä!

b) Avaruuden E täydellisyys tarkoittaa, että sen jokainen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$ suppenee eli että sille on olemassa $x \in E$, jolle $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_x$ $(= x + \mathcal{U}_0)$.

Olkoon ensin jokainen E_i täydellinen ja $\mathcal{F}$ Cauchy-filtteri tuloavaruudessa E. a)-kohdan mukaan kuvafiltterit $\mathcal{F}_i = \pi_i(\mathcal{F})$ ovat Cauchy-filttereitä, siis oletuksen mukaan suppenevia: $F_i \supset \mathcal{U}_{x_i}$ joillekin $x_i \in E_i$. Verifioidaan, että $\mathcal{F} \to x$ eli $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_{0,E}$, missä $x = (x_i)_{i\in I} \in E$:

Olkoon $U \in \mathcal{U}_x \subset E = \prod_{i\in I} E_i$. Voimme olettaa, että U on tulotopologian kantajoukko eli muotoa

$$U = x + \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i = x + \bigcap_{j\in J} \pi^{-1} U_j,$$

missä J on äärellinen ja $U_j \in \mathcal{U}_{0,E_i}$. Kullakin indeksillä $j \in J$ on $U_j \in \mathcal{F}_j = \pi_j(\mathcal{F})$, joten $\pi^{-1}U_j \in \mathcal{F}$ ja siis $\bigcap_{j\in J} \pi^{-1}U_j \in \mathcal{F}$, joten $U \in x + \mathcal{F}$.

Olkoon sitten tuloavaruus $E = \prod_{i\in I} E_i$ täydellinen ja $\mathcal{F}_j$ Cauchy-filtteri avaruudessa E_j jollain $j \in I$. Olkoon kaikilla $i \neq j$ $\mathcal{F}_i = \mathcal{U}_{E_i}$ ja olkoon $\mathcal{F}$ avaruuden E filtteri, jonka kantana ovat joukot $N_i = \pi^{-1}M_i$, $i \in I$, $M_i \in \mathcal{F}_i$. (Tätä voisi varmaan sanoa filtterien tuloksi.) Tämä on a)-kohdan perusteella Cauchy, sillä $\pi_i(\mathcal{F}) = F_i$ kaikilla $i \in I$ ja sekä tutkittava $\mathcal{F}_j$ että jokainen ympäristöfiltteri $\mathcal{U}_{E_i}$ ovat suppenevia, siis Cauchy. Oletuksen mukaan siis $\mathcal{F}$ suppenee eli $\mathcal{F} \supset x + \mathcal{U}_E$ jollekin

$x = (x-i)_{i\in I} \in E$. Osoitetaan lopuksi, että $\mathcal{F}_j \to x_j$ eli $\mathcal{F}_j \supset x_j + \mathcal{U}_{E_j}$. Olkoon $x_j + U_j \in x_j + \mathcal{U}_{e_j}$. Nyt $x + \pi_j^{-1}(U) \in x + \mathcal{U}_E \subset \mathcal{F}$. Siis

$$x_j + U_{E_j} \supset \pi_j(x + \pi_j^{-1}(U)) \in \pi_j(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_j,$$

joten $x_j + U_{E_j} \in \mathcal{F}_j$, ja siis $x_j + \mathcal{U}_{E_j} \subset \mathcal{F}_j$.

0.0.33. *Olkoon* $E = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \bigm| \exists \varepsilon_f > 0$ *siten, että* $f(t) = 0\ \forall\, 0 \le t \le \varepsilon(f)\}$ *varustettuna normilla* $\|f\| = \sup|f|$.

a) Onko joukko $T = \{f \in E \bigm| |f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\}$ *tynnyri?*

b) Entä onko se origon ympäristö?

c) Onko E tynnyriavaruus?

d) Onko E täydellinen?

Ratkaisu: a) Joukko T on absorboiva, sillä jos $f \in E$, niin valitaan $n_\varepsilon = \max\{n \in \mathbb{N} \bigm| \frac{1}{n} \ge \varepsilon\}$, jolloin $\lambda f \in T$ ainakin silloin, kun

$$|\lambda| \le \frac{1}{n_\varepsilon}\Big(\max_{1\le n\le n_\varepsilon} |f(\tfrac{1}{n})|\Big)^{-1}.$$

Joukko T on selvästikin balansoitu ja konveksi. Se on myös suljettu, siis tynnyri, koska sen komplementti on avoin: Olkoon nimittäin $f \in E \setminus T$. Silloin on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolla $|f(n)| > \frac{1}{n}$. Valitaan $r = |f(n)| - \frac{1}{n}$. Silloin avoin pallo $B(f,r) = \{g \in E \bigm| \|f-g\| < r\}$ sisältyy komplementtiin $E \setminus T$.

b) Joukko T ei ole origon ympäristö. Muuten se sisältäisi jonkin pallon $B(0,\frac{1}{n})$, mutta eipä sisällä. Vastaesimerkiksi kelpaa mikä tahansa sellainen jatkuva, kasvava funktio, joka on vakio 0 välillä $[0,\frac{1}{2n}]$ ja vakio $\frac{1}{n}$ välillä $[\frac{1}{2n},1]$.

c) Tutkittu normiavaruus E ei ole tynnyriavaruus.

d) Koska normiavaruus on metrisoituva ja lokaalikonveksi, seuraa tynnyrilauseesta 4.13, että E ei voi olla täydellinen.

0.0.34. **Esimerkki lokaalikonveksista avaruudesta M, joka on jonotäydellinen, mutta ei täydellinen.** *Olkoon* $E = \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} = \{$*kaikki funktiot* $[0,1] \to \mathbb{R}\}$*, jossa on tulotopologia eli pisteittäisen suppenemisen topologia eli seminormit* $p_t(f) = |f(t)|$*. Osoita, että esimerkliksi kelpaa aliavaruus* $M = \{f \in E \bigm| f(t) \ne 0$ *vain enintään numeroituvan monella* $t \in [0,1]\}$.

Ratkaisu: M on selvästikin E:n topologinen ja lineaarinen aliavaruus.

a) Tarkastellaan Cauchyn jonoa $(f_n)_\mathbb{N}$ joukossa M. Pisteittäisen suppenemisen topologiassa Cauchy-ehto merkitsee, että kaikilla $t \in [0,1]$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 = n_{\varepsilon,t} \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$, kun $n,m \ge n_0$. Kullakin t on $(f_n(t))_\mathbb{N}$ siis Cauchy-jono reaalilukuja, ja sellainen suppenee: $f_n(t) \to f(t) \in \mathbb{R}$. Näin saadaan raja-arvoehdokas $f \in E$. On ilmeistä, että $f_n \to f$ pisteittäisen suppenemisen topologiassa — siitä nimi! Riittää siis osoittaa, että $f \in M$ eli $f(t) \ne 0$ enintään numeroituvan monella $t \in [0,1]$. Merkitään

$$H_n = \{t \in \mathbb{R} \bigm| f_n(t) \ne 0\}.$$

Jokainen H_n on numeroituva, joten myös yhdiste

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{t \in \mathbb{R} \bigm| \exists n : f_n(t) \ne 0\}$$

on numeroituva. Tietenkin $f(t) = 0$ kaikilla t, joilla jokainen $f_n(t) = 0$, joten $f \in M$.

b) avaruuden M epätäydellisyys osoitetaan keksimällä M:n Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$, joka ei suppene kohti mitään $f \in M$. Keksimistä helpottaa, kun huomaa, että M ei ole suljettu, vaan esimerkiksi vakiofunktio $g(t) = 1$ kuuluu sen sulkeumaan avaruudessa E, joten on olemassa sitä kohti suppeneva M:n osajoukoista muodostuva E:n filtterikanta. Sen voi toivoa olevan etsitynlainen M:n filtteri.

Olkoon $\mathcal{F} = \{U \cap M \bigm| U \in \mathcal{U}_{g,E}\}$. Koska $\mathcal{U}_{g,E} \to g$ avaruudessa E, niin $\mathcal{U}_{g,E}$ on Cauchy-filtteri, joten sen jälki $\mathcal{F}$ avaruudessa M on M:n Cauchy-filtteri tai sisältää tyhjän joukon. Suljetaan pois jälkimmäinen vaihtoehto: Pisteittäisen suppenemisen topologiassa $U \in \mathcal{U}_{g,E} \iff U \supset \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \bigm| |f(t_i) - 1| \le \varepsilon\}$ joillekin äärellisen monelle $t_1, \dots t_k \in [0,1]$ ja jollekin $\varepsilon > 0$. Tällainen joukko sisältää esimerkiksi sen joukkoon M kuuluvan funktion f, joka saa arvon 1 tasan pisteissä $t_1, \dots t_k$ ja on muualla 0. Jos aliavaruuden M Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$ suppenisi kohti jotain funktiota $h \in M$, niin E:n filtterikanta $\mathcal{F}$ suppenisi sekä kohti funktioa h että kohti funktiota f, mikä on mahdotonta, koska avaruus E on Hausdorff.

0.0.35. *a) Todista Mazurin laajennuslauseen lineaarialgebrallinen versio: Olkoon E vektoriavaruus, $A \subset E$ konveksi, algebrallisesti avoin joukko, ja $M \subset E$ affiini aliavaruus siten, että $M \cap A = \emptyset$. Tällöin on olemassa affiini hypertaso $H \subset E$ siten, että $M \subset H$ ja $H \cap A = \emptyset$.*

b) Todista edellisen seurauksena reaalikertomisessa tapauksessa Hahnin ja Banachin lause sublineaarifunktiolle 3.6.

c) Todista reaalikertomisessa tapauksessa Mazurin lajennuslause Hahnin ja Banachin lauseen seurauksena käyttämättä uudelleen valinta-aksioomaa.

0.0.36. *Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $S = \{x_\alpha \bigm| \alpha \in I\} \subset E$. Sanomme, että joukko S on* topologisesti vapaa, *eli* topologisesti lineaarisesti riippumaton, *jos kaikilla $\alpha \in I$ pätee $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$.*

Osoita, että jos E on lokaalikonveksi, niin joukko $S = \{x_\alpha \bigm| \alpha \in I\} \subset E$ on topologisesti vapaa silloin ja vain silloin, kun on olemassa sellainen perhe jatkuvia lineaarimuotoja $S = \{f_\alpha \in E^* \bigm| \alpha \in I\}$, että kaikilla α, $\beta \in I$

$$f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{jos } \alpha = \beta \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että vaaditunlaiset lineaarimuodot f_α ovat olemassa. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa $\alpha \in I$ siten, että $x_\alpha \in \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Nyt $f_\alpha(x_\beta) = 0$ kaikilla $\beta \ne \alpha$, joten lineaarisuuden nojalla $f_\alpha(x) = 0$ kaikilla $x \in \langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle = \{$vektorien x_β $(\beta \ne \alpha)$ äärelliset lineaarikombinatiot$\}$. Siis erityisesti $0 = f(x_\alpha) = 1$. Vastaoletus on väärä.

Olkoon seuraavaksi S topologisesti vapaa. Tämä merkitsee, että kaikilla $\alpha \in I$ on $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Aliavaruus $\overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$ on suljettu, joten Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen 3.8 mukaan on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f_\alpha : E \to \mathbb{K}$, jolla $f(x_\alpha) = 1$ ja $f_\alpha = 0$ aliavaruudessa $\overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Näin on halutut lineaarimuodot löydetty.

0.0.37. *Olkoon E kompleksikertoiminen topologinen vektoriavaruus, $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ jokin sen hypertaso, f siis $\mathbb{C}$-lineaarinen $E \to \mathbb{C}$. Olkoon $f_{\mathbb{R}}$ lineaarimuodon f reaaliosa, siis $f_{\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re} f(x)$.*

a) Osoita, että osajoukko $H_{\mathbb{R}} = \{x \in E \mid f_{\mathbb{R}}(x) = 0\}$ on hypertaso reaalikertoimisessa topologisessa vektoriavaruudessa E, jota merkitsemme $E_{\mathbb{R}}$.

b) Näytä, että $H = H_{\mathbb{R}} \cap (iH_{\mathbb{R}})$.

Ratkaisu: a) Riittää näyttää, että $f_{\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re} f(x)$ on reaalilineaarinen kuvaus $E \to \mathbb{R}$. Tämä on helppoa suoraan laskemallakin, mutta laskeminen on turhaa, sillä $\operatorname{Re} f$ on yhdistetty kuvaus kuvauksista $f : E \to \mathbb{C}$ ja $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \mapsto x$, jotka kumpikin ovat reaalilineaarisia.

0.0.38. *Näytä, että jos E ja F ovat Fréchet'n avaruuksia ja $T : E \to F$ on lineaarikuvaus, niin kuvaaja $\operatorname{Gr} T$ on suljettu, jos ja vain jos*

$$(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0.$$

Ratkaisu: Tulotopologiassa $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \iff x_n \to 0$ ja $T(x_n) \to y$.

Jos kuvaaja on suljettu, niin suljetun kuvaajan lauseen 4.19 mukaan T on jatkuva, joten $x_n \to 0 \implies T(x_n) \to T(0) = 0$. Jos siis $x_n \to 0$ ja $T(x_n) \to y$, niin $0 = y$, sillä Fréchet'n avaruutena F on Hausdorff, joten raja-arvo on yksikäsitteinen.

Paluuväitteen todistamiseksi oletetaan, että $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0$. Olkoon $(x, y) \in \overline{\operatorname{Gr} T}$. Koska E ja F ovat metrisiä, on myös tuloavaruus metrisoituva, joten on olemassa joukon $\operatorname{Gr} T$ jono $(x_n, y_n) \to (x, y)$ eli $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$. Sovelletaan oletusta jonoon $(x_n - x)_{\mathbb{N}}$, jolle ainakin $(x_n - x) \to 0$. Koska $T(x_n - x) = T(x_n) - T(x) = y_n - T(x) \to y - T(x)$, niin oletuksen nojalla $y - T(x) = 0$. Siis $T(x) = y$, joten $(x, y) \in \operatorname{Gr} T$, joka siis on suljettu.

0.0.39. *Huomautuksen 5.13 mukaan k ahden topologisen vektoriavaruuden suoraa summaa $E = M \oplus N$ sanotaan* topologiseksi suoraksi summaksi*, mikäli se on varustettu tulotopologialla eli kuvaus $(x, y) \mapsto x + y$ on homeomorfismi tuloavaruudelta $M \times N$ suoralle summalle $E = M \oplus N$. Samaa ilmaistaan sanomalla, että avaruuden E aliavaruus N on aliavaruuden $M \subset E$* topologinen supplementti. *Merkitään π_M:llä projektiota suoralta summalta $E = M \oplus N$ aliavaruudelleen M suuntaan N, siis $\pi_M(x + y) = x$, kun $x \in M$ ja $y \in N$.*

a) Osoita, että jos M ja N ovat E:n topologisia ja lineaarialgebrallisia alivaruuksia, niin suora summa $E = M \oplus N$ on topologinen suora summa tasan sillä ehdolla, että π_M on jatkuva.

b) Näytä, että jos $E = M \oplus N$ on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin π_M on jatkuva ja siis $E = M \oplus N$ on topologinen suora summa.

Ratkaisu: a) Olkoon suora summa topologinen eli topologisena avaruutena $E = M \times N$. Tällöin projektiokuvaus π_M on jatkuva tulotopologian määritelmän mukaan.

Olkoon seuraavaksi π_M jatkuva. Tällöin myös projektio N:lle eli kuvaus $\pi_N = Id_{M \oplus N} - \pi_M$ on jatkuva. Avaruuden $E = M \oplus N$ topologiassa molemmat projektiokuvaukset ovat siis jatkuvia eli avaruudessa E on tulotopologiaa hienompi topologia. Toisaalta summakuvaus $E \times E \to E : (a, b) \mapsto a + b$ on jatkuva, joten myös sen rajoittuma $M \oplus \{0\} \times \{0\} \oplus N \to M \oplus N$ eli isomorfismi $M \times N \to M \oplus N$ on jatkuva, joten suoran summan E topologia on myös tulotopologiaa karkeampi, siis sama.

b) Jos E on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin sekä M että N ovat Fréchet'n avaruuksia, samoin niiden tuloavaruus $M \times N$. Oletuksen mukaan myös $E = M \oplus N$ on Fréchet'n avaruus. Totesimme edellä, että lineaari-isomorfismi $M \times N \to M \oplus N$ on jatkuva surjektio, joten avoimen kuvauksen lause 4.17 takaa, että se on isomorfismi.

0.0.40. *(Jatkoa) c) Oletetaan, että $T : E \to F$ on jatkuva, avoin lineaarinen surjektio, ja ytimellä* $\operatorname{Ker} T \subset E$ *on topologinen supplementti*

Osoita, että T:llä on jatkuva lineaarinen oikeanpuoleinen käänteiskuvaus *eli jatkuva, lineaarinen $S : F \to E$, jolla $T \circ S = id_F$.*

Ratkaisu: Aluksi taustaa: Yleisesti kuvaus on surjektio tasan silloin, kun sillä on oikeanpuoleinen käänteiskuvaus (ja injektio tasan, kun sillä on vasemmanpuoleinen käänteiskuvaus). Jos siis T on surjektio, niin ainakin sillä on olemassa oikeanpuoleinen käänteiskuvaus. Surjektiivisen lineaarikuvauksen tapauksessa tiedämme enemmänkin: T:llä on *kanoninen hajoitelma* $T = I \circ \phi$, missä $\phi : E \to E/\operatorname{Ker} T$ on kanoninen surjektio ja $I : E/\operatorname{Ker} T \to F$ on lineaari-isomofismi. Käänteiskuvaus muodostuu siten lineaarisen isomorfismin käänteisestä I^{-1} ja sen päälle valinnasta, joka poimii kustakin sivuluokasta $x + \operatorname{Ker} T$ jonkin vektorin. Tällainen pitää siis valita edullisesti.

Hyvän valinnan tekemisessä auttaa lauseen oletus, jonka mukaan ytimellä $N = \operatorname{Ker} T \subset E$ on topologinen supplementti, olkoon se M. Siis $E = M \oplus N \sim M \times N$. Nytpä lineaarikuvaus $J = \phi \big|_M : M \to E/N$ on lineaarinen isomorfismi, sillä se on injektio (Jos $J(x) = 0_{E/N}$, niin $x \in M \cap \operatorname{Ker} \phi = M \cap N = \{0\}$.) ja surjektio (Jokaiselle $v + N \in E/N$ eli $v = (x, y) \in E = N \oplus N$ on $v + N = \phi(v + n)$ kaikilla $n \in N$. Erityisesti $v + N = \phi(v - y) = \phi(x)$, missä $x \in M$.) Kuvauksella $T \big|_M$ on siis lineaarinen käänteiskuvaus $S : F \to M \subset E$, kunhan M on ytimen algebrallinen supplementti.

Olemme olettaneet, että M on topologinen supplementti. Tähän perustuu, että S on jatkuva. Olkoon siis $A \subset E = M \oplus N$ avoin. Silloin $A \cap M$ on avoin aliavaruudessa M ja siis $(A \cap M) \times N$ on avoin tuloavaruudessa $M \times N$ eli $(A \cap M) \oplus N$ on avoin avaruudessa $E = M \oplus N$. Koska T on oletuksen mukaan avoin kuvaus, on siis joukko $T((A \cap M) \oplus N) \subset F$ avoin. Mutta koska $N = \operatorname{Ker} T$, niin $T((A \cap M) \oplus N) = T(A \cap M) = S^{-1}(A \cap M) = S^{-1}(A)$, joka piti näyttää avoimeksi.

0.0.41. *Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absorboiva, balansoitu ja konveksi$\}$.*

a) Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.

b) Osoita, että avaruudessa E jokainen seminormi on jatkuva ja jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva.

Ratkaisu: a) Jokainen perhe absorboivia, balansoituja ja konvekseja joukkoja määrää lauseen 2.5 mukaan perheen seminormeja ja siis jonkin lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$ avaruudessa E. Olkoon $\mathcal{T}'$ lokaalikonveksi topologia avaruudessa E. Sillä on tynnyreistä muodostuva origon ympäristökanta. Nämä kantajoukot ovat oletuksen mukaan origon ympäristöjä myös topologiassa $\mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}'$.

b) Olkoon p seminormi avaruudessa E. Sen semipallot ovat absorboivia, balansoituja ja konvekseja, siis origon ympäristöjä, joten p on jatkuva. Olkoon sitten $T : E \to F$ lineaarikuvaus ja $p : F \to \mathbb{R}$ jatkuva seminormi. Silloin yhdistetty kuvaus $p \circ T : E \to \mathbb{R}$ on seminormi avaruudessa E, siis jatkuva. Tämä takaakin lineaarikuvauksen T jatkuvuuden.

0.0.42. **Banachin ja Steinhausin lauseen triviaali puoli.** *Olkoon E Fréchet'n avaruus, F lokaalikonveksi topologinen vektoriaaruus ja $\mathcal{Y} \subset \mathcal{L}(E,F)$ perhe niiden välisiä jatkuvia lineaarikuvauksia. Osoita, että jos $\mathcal{Y}$ on yhtäjatkuva, niin $\mathcal{Y}$ on pisteittäin rajoitettu.*

0.0.43. *Olkoot $(E,\mathcal{T}_E)$ ja $(F,\mathcal{T}_F)$ Fréchet'n avaruuksia ja olkoon lisäksi avaruudessa F toinen Hausdorff-topologia τ_F, joka on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$. Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen.*

Osoita suljetun kuvaajan lauseen 4.19 avulla, että jos T on jatkuva $\mathcal{T}_E \to \tau_F$-mielessä, niin se on jatkuva myös $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_F$-mielessä.

Ratkaisu: Tarkastetaan, että T täyttää suljetun kuvaajan lauseen ehdot. Ainakin $T : (E,\mathcal{T}_E) \to (F,\mathcal{T}_F)$, missä molemmat ovat Fréchet'n avaruuksia. Koska T on jatkuva kuvauksena $T : (E,\mathcal{T}_E) \to (F,\tau_F)$ ja τ_F on Hausdorff-topologia, T:n kuvaaja on suljettu tulotopologiassa $\mathcal{T}_E \times \tau_F$, joka on oletuksen nojalla karkeampi kuin $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_F$. Siis kuvaaja on suljettu myös topologiassa $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_F$. □

0.0.44. *(Jatkoa) Sovella edellistä tehtävää todistamalla, että seuraava lineaarikuvauksen jatkuvuuden verifioimiskeino toimii:*

Olkoot $(E,\mathcal{T}_E)$ ja $(F,\mathcal{T}_F)$ Fréchet'n avaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarinen. Osoita, että T on jatkuva, jos on olemassa sellainen Hausdorff-avaruus $(X,\mathcal{T}_X)$ ja jatkuva injektio $f : F \to X$, että $f \circ T$ on jatkuva. Vihje: alkukuvatopologia.

Ratkaisu: Sovelletaan ehtoa 0.0.43. Merkitään symbolilla $\tau_F = f^{-1}(\mathcal{T}_X)$ alkukuvatopologiaa, jonka kuvaus $f : F \to X$ määrää avaruuteen F.

Koska T on injektio ja X on Hausdorff, on myös τ_F Hausdorff.

Koska f on jatkuva, τ_F on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$.

Oletettiin, että $f \circ T$ on jatkuva. Siksi T on jatkuva kuvauksena $T : (E,\mathcal{T}_E) \to (F,\tau_F)$, sillä alkukuvatopologiassa joukko on avoin, jos ja vain jos sen kuva on avoin, joten

$$A \in \tau_F \implies f(A) \in \mathcal{T}_X \implies T^{-1}(A) = T^{-1}(f^{-1}(f(A)) = (f \circ T)^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}_E.$$

Kohdassa $A = f^{-1}(f(A))$ käytettiin tietoa, että A on injektio. □

0.0.45. *Olkoon $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Avaruuden* $E = \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ on k kertaa jatkuvasti derivoituva$\}$ *standarditopologia,* derivaattojen tasaisen kompaktin suppenemisen topologia, *on lokaalikonveksi topologia, jonka määrittelee seminormiperhe* $\mathcal{P} = \{p_{\alpha,K} \mid \alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \le k$ ja $K \subset \mathbb{R}$ on kompakti$\}$, *missä*

$$p_{\alpha,K}(f) = \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| = \max_{x\in K} |D^\alpha f(x)|.$$

Osoita, että $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ on metrisoituva.

Ratkaisu: Koska jokainen kompakti reaalilukujoukko sisältyy johonkin kompaktiin väliin $[-m, m]$, niin seminormiperheen $\mathcal{P}$ voi korvata jatkuvien seminormien kannalla (ks. 0.0.24) $\mathcal{P}_J = \{p_{\alpha,m} = p_{\alpha,[-m,m]} \bigm| \alpha \in \mathbb{N},\, \alpha \leq k,\, m \in \mathbb{N}\}$, joka antaa saman topologian ja on lisäksi numeroituva. Siis $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ on metrisoituva, sillä se on myös Hausdorff, koska kaikilla $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ on jokin kohta $x \in \mathbb{R}$, jossa $f(x) \neq 0$, jolloin $p_{0,m}(f) = \sup_{-m \leq y \leq m} |f(y)| \geq |f(x)| > 0$, kunhan $-m \leq x \leq m$.

0.0.46. *(Jatkoa) Osoita, että $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet.*

Ratkaisu: Induktio k:n suhteen. Olkoon f_n Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. Jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$ jono $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono reaalilukuja, siis suppeneva. Näin saadaan raja-arvoehdokas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Olkoon $K = [-m, m]$. Joukkoon K rajoitettuina funktiot f_n suppenevat tasaisesti, sillä seminormi $p_{0,m}$ on tässä joukossa sama kuin tasaisen suppenemisen antava sup-normi. Samasta syystä suppenevat niiden derivaatat tasaisesti kohti jotain funktiota. Tunnetun analyysin lauseen mukaan derivaattajonon tasainen raja-arvo on f'. Samalla tavalla todistetaan, että toisten derivaattojen jono suppenee kohti funktiota f'' tasaisesti välillä $]-m, m[$ jne. induktiolla aina k:nteen derivaattaan asti. Koska tämä toimii kaikilla m, niin $p_{\alpha,m}(f_n - f) \to 0$ kaikilla tarvittavilla m ja α, eli $f_N \to f \in \mathbb{C}^k$ avaruuden $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ topologiassa.

0.0.47. *Osoita, että $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet.*

Ratkaisu: Edellisen tehtävän päättely toimii nytkin!

0.0.48. *Olkoon annettuna kompakti joukko $K \subset \mathbb{R}$ ja luku $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Osoita, että aliavaruus $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \bigm| \operatorname{supp} f \subset K\}$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet. Entä Banach; onko jatkuvaa normia?*

Ratkaisu: Edellisen tehtävän päättely toimii muuten, mutta täytyy todeta, että rajafunktio f on avaruudessa $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})$, eli $f(x) = 0$ kaikilla $x \notin K$, mikä seuraa edellisen tehtävän 0.0.47 lisäksi siitä, että $f_n \to f$ pisteittäin ja $f_n(x) = 0$ kaikilla $x \notin K$. Itse asiassa $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})$ on Banach-avaruus, sillä kompaktissa joukossa voi väliarvolauseen avula arvioida alempien derivaattojen itseisarvoja ylempien derivaattojen itseisarvojen supremumeilla, joten normi $p_{k,m}$, missä $K \subset [-m, m]$, määrää yksinään avaruuden $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})$ topologian.

0.0.49. *"Kirjallisuustehtävä". Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})$.*

Vihje: Standarditodistus perustuu silotukseen eli konvoluutioon sellaisen einegatiivisen $\mathcal{C}^\infty$-funktion ϕ kanssa, jolla on kantajana pieni väli $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ja $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi = 1$. (Ks. 12.10.)

0.0.50. *Osoita, että avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ standarditopologian määrää myös seminormiperhe $\mathcal{Q}$, missä seminormit ovat*

$$q_{m,K}(f) = \int_K |D^n f(x)|\, dx,$$

missä $K \subset \mathbb{R}$ on kompakti ja $n \in \mathbb{N}$. Vihje: $f(x) = \int_x^{x+1} (t - x - 1) f'(t) + f(t)\, dt$.

Ratkaisu: Avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ standarditopologian määrää seminormiperhe $\mathcal{P} = \{p_{n,K} \;\big|\; K \subset \mathbb{R}$ kompakti, $n \in \mathbb{N}\}$, missä $p_{n,K}(f) = \sup\{|D^n f(x)| \;\big|\; x \in K\}$. Merkitään topologioita τ_P ja τ_Q.

a) $\tau_Q \subset \tau_P$: Suora arvio:

$$q_{n,K}(f) = \int_K |D^n f(x)| \leq \sup_K |D^n f(x)| \int_K 1 = p_{n,K}(f) \cdot \int_K 1$$

b) $\tau_P \subset \tau_Q$: Osittaisintegrointi antaa kaikilla $m < k$

$$D^m f(x) = \int_x^{x+1} (t - x - 1) D^{(m+1)} f(t) + D^m f(t)\, dt,$$

joten kaikilla $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
p_{m,K}(f) &= \sup_K |D^m f(x)| \\
&= \sup_K \{ | \int_x^{x+1} (t - x - 1) D^{(m+1)} f(t) + D^m f(t)\, dt | \\
&\leq \sup_K \left(| \int_x^{x+1} (t - x - 1) D^{(m+1)} f(t)\, dt | + | \int_x^{x+1} D^m f(t)\, dt | \right) \\
&\leq \sup_K | \int_x^{x+1} (t - x - 1) D^{(m+1)} f(t)\, dt | + \sup_K | \int_x^{x+1} D^m f(t)\, dt | \\
&\leq \sup_{x,y \in K} |y - x| \cdot \int_{K'} |D^{(m+1)} f(t)|\, dt + \int_{K'} |D^m f(t)|\, dt \\
&\leq \operatorname{diam} K' \cdot q_{m+1,K'}(f) + q_{m,K'}(f),
\end{aligned}$$

missä on merkitty $K' = \overline{\bigcup_{x \in K} B(x,1)}$.

Huom Avaruuksista $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ on analyysissä useimmiten käytössä n-ulotteiset versiot $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, joissa topologian antavat seminormit $p_\alpha(f) = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$, missä $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja

$$D^\alpha f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x)$$

on multi-indeksiä $\alpha = (\alpha_q, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ vastaava osittaisderivaatta. Tämä ei juuri vaikuta yllä esitettyihin asioihin.

0.0.51. *([2] s. 228). (Jatkoa) Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja $F \subset \mathbb{R}^K$ Banachin avaruus, jonka vektorit eli pisteet siis ovat funktioita $K \to \mathbb{R}$ tavallisin vektorilaskutoimituksin. Oletetaan, että F:n topologia on hienompi kuin pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbb{R}^K$ periytyvä topologia. Oletetaan vielä, että $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}) \subset F$.*

Todista, että on olemassa luku $k \in \mathbb{N}$, jolla $\mathcal{C}_K^k(\mathbb{R}) \subset F$.

Ratkaisu: Sovelletaan tehtävää 0.0.43 luonnollisin valinnoin, ts. valitaan avaruudeksi E funktioavaruus $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$ standarditopologiallaan, jota tässä merkitään $\mathcal{T}_E$. Tutkittavan Banach-avaruuden F topologiaksi valitaan normitopologia $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ ja karkeaksi Hausdorff-topologiaksi τ_F valitaan pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbb{R}^K$ periytyvä topologia. Lineaarikuvaukseksi $T : E \to F$ sopii inkluusiokuvaus.

Tarkastetaan, että tehtävän 0.0.43 ehdot ovat voimassa: $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$ ja F ovat Fréchet'n avaruuksia ja avaruudessa F on lisäksi Hausdorff-topologia τ_F, joka on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$. Inkluusiokuvaus $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to F$ on lineaarinen ja lisäksi jatkuva topologioiden $\mathcal{T}_E$ ja τ_F mielessä, sillä joukossa $C^\infty_K(\mathbb{R})$ normitopologia on hienompi kuin pistesuppenemisen topologia.

Tehtävän 0.0.43 mukaan inkluusio T on siis jatkuva myös topologioiden $\mathcal{T}_E$ ja $\mathcal{T}_F$ mielessä eli kuvauksena $C^\infty_K(\mathbb{R}) \to (F, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$, joten F:n normin rajoittuma avaruuteen E on jatkuva avaruuden $E = C^\infty_K(\mathbb{R})$ topologiassa. On siis olemassa luku $\lambda > 0$ ja sellainen avaruuden $C^\infty_K(\mathbb{R})$ kantaseminormi $p_{n,K}$, että avaruudessa $E = C^\infty_K(\mathbb{R})$

$$\| \cdot \|_F \leq \lambda p_{n,K}.$$

Seminormi $p_{n,K}(f) = \sup_{x\in K} |D^n f(x)|$ on itse asiassa normi avaruudessa $C^k_K(\mathbb{R})$. Merkitään sen normitopologiaa $\mathcal{T}_{p_{n,K}}$, jolloin aliavaruudessa $E = C^\infty_K(\mathbb{R})$ on $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}_{p_{n,K}}$ ja siis

$$F\text{:n normitopologia } \mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}_{p_{n,K}} \subset \mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})\text{:n topologia} \subset \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})\text{:n oma topologia } \mathcal{T}_E.$$

Erityisesti siis avaruuden F aliavaruudessa $C^\infty_K(\mathbb{R})$ on F:n normitopologia karkeampi kuin $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$:n topologia. Siksi aliavaruuden $C^\infty_K(\mathbb{R})$ täydentymä avaruuden F normitopologiassa sisältää avaruuden $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$ topologian mielessä muodostetun täydentymän! Mutta jälkimmäinen on tehtävän 0.0.49 mukaan $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R})$ ja täydentymä avaruuden F normitopologiassa sisältyy tietenkin avaruuteen F, joka on täydellinen. Siis $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}) \subset F$. □

0.0.52. *Osoita, että topologisen vektoriavaruuden E aliavaruudella $M \subset E$ on lauseessa 5.2 mainitut ominaisuudet:*

(i) *M on topologinen vektoriavaruus.*

(ii) *M perii E:ltä seuraavat ominaisuudet*

 (a) *Hausdorff*

 (b) *metrisoituva*

 (c) *lokaalikonveksi (alkuperäisten seminormien rajoittumat antavat topologian, jatkuvat seminormit ovat tasan alkuperäisten jatkuvien seminormien rajoittumat.)*

 (d) *normiavaruus.*

(iii) *Jos E on täydellinen ja M on suljettu, niin M on täydellinen.*

(iv) *Jos E on lokaalikonveksi, niin jokainen M:n jatkuva lineaarimuoto on jonkin E:n jatkuvan lineaarimuodon rajoittuma.*

(v) *Aito aliavaruus on sisäpisteetön, mutta voi olla tiheä.*

Vihje: Kohdat (ii c), (iii) ja (iv) on jo todistetttu. Etsi todistukset ja todista muut.

0.0.53. *Osoita, että topologisen vektoriavaruuden E tekijäavaruudella E/H on lauseessa 5.4 mainitut ominaisuudet:*

(i) *E/H on topologinen vektoriavaruus.*

(ii) *Kanoninen surjektio $\phi : E \to E/H$ on jatkuva ja avoin kuvaus.*

(iii) *E/H on Hausdorff aina ja vain, kun $H \subset E$ on suljettu.*

0.0.54. *Todista huomautuksen 5.6 väite: Kun p on seminormi vektoriavaruudessa E, niin $\hat{p}$ on normi tekijäavaruudessa $E/\mathrm{Ker}\, p$.*

0.0.55. *Osoita, että topologisten vektoriavaruuksien E_i tuloavaruus $\prod_{i\in I}$ perii avaruuksilta E_i lokaalikonveksiuden, Hausdorff-ehdon ja täydellisyyden. Näytä vielä, että se perii metrisoituvuuden, jos tekijöitä on numeroituvan monta.*

0.0.56. *Vaativa lisätehtävä. Todista lauseen 4.11 väite olettamatta metrisoituvuutta.*

0.0.57. *Osoita lineaarikuvauksen sulkeumaan jatkamista koskevan lauseen 4.11 avulla, että topologisen vektoriavaruuden E kaikki täydentymät ovat isomorfisia keskenään, joten "täydentymä on yksikäsitteinen".*

0.0.58. *Näytä esimerkillä, että induktiivinen lokaalikonveksi topologia 5.22 voi erota E:n maalitopologiasta.*

0.0.59. *Näytä esimerkillä, että äärettömän monen avaruuden suorassa summassa lokaalikonveksi induktiivinen limestopologia 5.24 voi olla (onko aina?) aidosti hienompi kuin heikko topologia 5.11, vaikka molemmat indusoivat alkuperäisiin avaruuksiin niiden alkuperäisen topologian.*

0.0.60. *Osoita, että topologisessa vektoriavaruudessa seuraavat ovat rajoitettuja joukkoja:*

a) *jokainen täysrajoitetu joukko, erityisesti kompakti joukko ja Cauchy-jonon pisteet (Ks. 6.6),*
b) *rajoitetun joukon balansoitu verho,*
c) *rajoitetun joukon sulkeuma,*
d) *rajoitetun joukon osajoukko,*
e) *rajoitetun joukon kuva jatkuvassa lineaarikuvauksessa,*
f) *rajoitettujen joukkojen äärellinen yhdiste*
g) *rajoitettujen joukkojen äärellinen summa*
h) *lokaalikonveksissa avaruudessa rajoitetun joukon konveksi verho.*
i) *normiavaruudessa tavalliset rajoitetut joukot,*

Vihje: Konveksia verhoa koskeva väite selvitetään lauseen 6.2 avulla.

0.0.61. *Osoita, että topologisessa vektoriavaruudessa jokainen täysrajoitettu joukko on rajoitettu ja seuraavat ovat täysrajoitettuja:*

a) *äärellinen joukko,*
b) *kompakti joukko,*
c) *Cauchy-jonon pisteet*
d) *täysrajoitetun joukon balansoitu verho,*
e) *täysrajoitetun joukon sulkeuma,*
f) *täysrajoitetun joukon osajoukko,*
g) *täysrajoitetun joukon kuva jatkuvassa lineaarikuvauksessa,*
h) *täysrajoitettujen joukkojen äärellinen yhdiste*
i) *täysrajoitettujen joukkojen äärellinen summa*

0.0.62. *Todista lause 6.7, jonka mukaan ääretönulotteisen normiavaruuden suljettu pallo on aina rajoitettu, mutta ei koskaan täysrajoitettu, erityisesti ei kompakti.*

Vihje: Vrt. lauseen 1.32 todistukseen.

0.0.63. *Separoikoon dualiteetti (E,F) avaruuden F ja olkoon $G \subset F$ aito aliavaruus. Osoita, että $\sigma(E,F)$ on aidosti hienompi kuin $\sigma(E,G)$, kuten lauseessa 7.16 luvataan.*

Vihje: Huomaa sana ”aito”, käytä lausetta 7.12 ja separointioletusta. $\square$

0.0.64. *Osoita, että E:n heikko topologia $\sigma(E,F)$ on Hausdorff tasan silloin, kun dualiteetti (E,F) separoi avaruuden E.*

Ratkaisu: Lauseen 2.9 mukaan lokaalikonveksissa avaruudessa Hausdorff-ehto on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisessa pisteessä $x \in E \setminus \{0\}$ ainakin yksi seminormi $p_k \in \mathcal{P}$ saa nollasta eroavan arvon, joten

$$\begin{aligned}\sigma(E,F) \text{ on Hausdorff } &\iff \forall x \in E\, \exists p = |\langle \cdot, y\rangle| \text{ se. } |\langle x, y\rangle| \neq 0 \\ &\iff \forall x \in E\, \exists y \in F \text{ se. } \langle x, y\rangle \neq 0 \iff (E,F) \text{ separoi } E\text{:n}\end{aligned}$$

0.0.65. *Todista, että jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin $\sigma(E,E^*)$ on Hausdorff-topologia.*

Ratkaisu: Tämä seuraa edellisestä tehtävästä ja lauseesta 7.8, jonka mukaan lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden topologinen duaali separoi sen.

0.0.66. *Onko $\sigma(E,E^*)$ hienoin — tai ehkä karkein — dualiteettiin (E,E^*) sopeutuva topologia?*

Ratkaisu: Karkein. Heikko topologia $\sigma = \sigma(E,F)$ on lokaalikonveksi ja seurauksen 7.13 mukaan $E^*_\sigma = F$. Karkeampaa dualiteettiin (E,F) sopeutuvaa topologiaa ei ole olemassa, sillä lokaalikonveksi topologia τ sopeutuu dualiteettiin (E,F) nimenomaan silloin, kun jokainen $|\langle \cdot, y\rangle| \quad (y \in F)$ on τ-jatkuva.

0.0.67. *Olkoot E ja F vektoriavaruuksia, joista E äärellisulotteinen. Esitä välttämätön ja riittävä ehto avaruudelle F, joka takaisi, että on olemassa separoiva dualiteetti (E,F).*

Ratkaisu: Jos dualiteetti (E,F) on separoiva, niin voi tulkita sekä $F \subset E'$ että $E \subset F'$. Siis $\dim F \leq \dim E' = \dim E$, joten myös F on äärellisulotteinen, jolloin symmetriasyistä myös $\dim E \leq \dim F$. Siis $\dim E = \dim F$. Tässä saatiin välttämätön ehto, ja onhan tämä selvästi riittäväkin.

0.0.68. *Olkoon E varustettu algebrallisen duaalinsa määräämällä heikolla topologialla $\sigma(E,E')$. Osoita, että*

a) jos $A \subset E$ on rajoitettu, niin on olemassa äärellisulotteinen aliavaruus $G \subset E$ siten, että $A \subset G$,

b) E:n jokainen vektorialiavaruus on suljettu,

c) E:n jokaisella vektorialiavaruudella on topologinen supplementti.

Ratkaisu: Topologian $\sigma = \sigma(E,E')$ määräävät seminormit $p(s) = |f(x)|$, missä f käy läpi kaikki lineaarikuvaukset $E \to \mathbb{K}$. Tässä topologiassa $E' = E^*$.

a) Oletus ”$A \subset E$ on rajoitettu” merkitsee, että jokainen lineaarimuoto $f \in E'$ on rajoitettu joukossa A. Antiteesi: on olemassa lineaarisesti riippumattomat vektorit $x_1, x_2 \dots \in A$. Määritellään lineaarisessa aliavaruudessa $H = \operatorname{span}(x_1, x_2 \dots) = \big\{ \sum_{\mathbb{N}} \lambda_i x_i \;\big|\; \lambda_i \in \mathbb{K},\, x_i \in E, \text{vain äärellisen moni } \lambda_i \neq 0 \big\}$ lineaarimuoto $f(\sum_{\mathbb{N}} \lambda_i x_i) =$

$\sum_{\mathbb{N}} i\lambda_i$ ja jatketaan se koko avaruuden E lineaarimuodoksi, jolloin erityisesti $f(x_i) = i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, eikä A siis ole σ-rajoitettu.

b) Olkoon $H \subset E$ lineaarinen aliavaruus. Varustetaan H Hamelin kannalla $K_H \subset H$ ja jatketaan se koko avaruuden Hamel-kannaksi K. Määritellään kullakin $x \in K \setminus K_H$ lineaarimuoto $f_x \in E'$ asettamalla kantavektoreiden kuviksi $f_x(x) = 1$ ja $f_x(y) = 0$ kaikille $x \in K \setminus \{x\}$. Koska f_x on jatkuva, on $\operatorname{Ker} f_x$ suljettu ja siis $H = \bigcap_{x \in K \setminus K_H} \operatorname{Ker} f_x$ on suljettu.

c) Jokaisella vektorialiavaruudella on algebrallinen supplementti. Koska kaikki aliavaruudet ovat $\sigma(E, E')$-suljettuja, on jokainen supplementti topologinen.

0.0.69. *Olkoon (E, F) dualiteetti, E ääretönulotteinen. Osoita, että $\sigma(E, F)$ ei ole normiavaruustopologia.*

Ratkaisu: Heikossa topologiassa jokainen origon ympäristö sisältää jonkin epätriviaalin vektorialiavaruuden, nimittäin hypertasojen äärellisen leikkauksen.

0.0.70. *Olkoon E ääretönulotteinen normiavaruus. Osoita, että duaalin nollavektori $0 \in E^*$ kuuluu duaalin yksikköpallon kuoren $\{y \in E^* \mid \|y\| = 1\}$ sulkeumaan topologiassa $\sigma(E^*, E)$.*

Ratkaisu: Heikossa topologiassa jokainen origon ympäristö sisältää jonkin epätriviaalin vektorialiavaruuden, nimittäin hypertasojen äärellisen leikkauksen.

0.0.71. *Oletetaan, että dualiteetti (E, F) separoi avaruuden E. Olkoon $A \subset E$. Osoita, että $A^\circ = \{0\} \iff A^{\circ\circ} = E$.*

Ratkaisu: $A^\circ = \{0\} \implies A^{\circ\circ} = \big\{x \in E \mid |\langle x, y\rangle| \leq 1 \forall x \in \{0\}\big\} = E$ ja $A^{\circ\circ} = E \implies A^{\circ\circ\circ} = E^\circ = \{0\}$. Viimeinen yhtäläisyysmenrkki tarkoittaa, että dualiteetti (E, F) separoi E:n (7.22 (ix)).

0.0.72. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $B \subset E$ balansoitu, konveksi, rajoitettu ja täydellinen. Varustetaan aliavaruus $E_B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB \subset E$ joukon $B \subset E_B$ mittausfunktiolla $\|x\| = \inf\{\lambda \mid x \in \lambda B\}$, joka on normi, koska B on paitsi balansoitu ja konveksi myös rajoitettu E:n alkuperäisessä Hausdorff-topologiassa τ. Osoita, että normiavaruuden E_B suljettu yksikköpallo on B.*

Ratkaisu: B on avaruuden E täydellinen osajoukko, siis suljettu. Upotuskuvaus eli kanoninen injektio $E_B \to E$ on jatkuva, koska B:n rajoittuneisuuden takia kaikilla origon ympäristöillä U on olemassa $\lambda > 0$, jolla $\lambda B \subset U$. Siis B on suljetun joukon alkukuvana suljettu myös normitopologiassa. Balansoitu konveksi joukko B sisältää lauseen 2.5 mukaan mittausfunktionsa avoimen yksikköpallon ja sisältyy selvästi sen suljettuun yksikköpalloon, joten sen sulkeuma $\bar{B}$ on suljettu pallo. Mutta B on suljettu, joten B on suljettu pallo.

0.0.73. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus. Dualiteetti (E, E^*) on separoiva (7.8). Siksi $E_{\sigma(E,E^*)}$:n täydentymä on lauseen 7.18 c) mukaan topologisen duaalin algebrallinen duaali $(E^*)'$. Voiko jo E_σ olla täydellinen?*

Ratkaisu: Pitää tutkia, onko koskaan $F = E^*$ ja $E = F'$. Osoittautuu, että näin käy, kun valitaan $E = F'_{\sigma(F',F)}$. Tarkastetaan tulos:

- Valitaan mikä tahansa vektoriavaruus F. Saa olla ääretönulotteinen.

- Olkoon E sen algebrallinen duaali F'.
- Varustetaan E lokaalikonveksilla topologialla $\sigma(E,F)=\sigma(F',F)$, joka on lokaalikonveksi, Hausdorff ja dualiteettiin (F',F) sopeutuva, koska dualiteetti on separoiva.
- $E^*=(E_{\sigma(E,F)})^*=F$.
- $(E^*)'=F'=E$.

Esimerkki osoittaa, että ääretönulotteisessakin tapauksessa voi olla $(E^*)'=E$. On siis olemassa heikolla topologiallaan täydellinen ääretönulotteinen avaruus!

0.0.74. *Olkoon* (E,F) *separoiva dualiteetti ja* $M\subset E$ *vektorialiavaruus. Osoita, että* $M^{\perp\perp}=M$, *jos ja vain jos* M *on suljettu jossain sellaisessa* E*:n topologiassa, joka sopeutuu dualiteettiin* (E,F).

Ratkaisu: Olkoon aluksi $M^{\perp\perp}=M$. Nyt M on suljettu topologiassa $\sigma(E,F)$, sillä minkä tahansa joukon $B\subset F$ ortogonaalikomplementti $B^\perp=\bigcap_{x^*\in B}\operatorname{Ker}\langle\cdot,x^*\rangle$ on $\sigma(E,F)$-suljettujen joukkojen leikkauksena $\sigma(E,F)$-suljettu.

Olkoon seuraavaksi M suljettu jossain sopeutuvassa topologiassa. Silloin M on heikostikin suljettu, onhan M konveksi (7.29). Heikosti suljetulle aliavaruudelle M on tietenkin $M^\perp=M^\circ$ (!) edelleen aliavaruus, joten $M^{\perp\perp}=M^{\circ\circ}=\overline{M}=M$.

0.0.75. *Täydennä lauseen 7.38 todistus osoittamalla, että*

a) $\mathfrak{S}-$*topologia on lokaalikonveksi ja saadaan heikosti rajoitettujen joukkojen* $A\in\mathfrak{S}$ *polaarien* A° *mittausfunktioista* $p_A(y)=\sup_{x\in A}|\langle x,y\rangle|$.

b) Jos $\mathfrak{S}$ *toteuttaa ehdot*

(1) $A,B\in\mathfrak{S}\implies\exists\,C\in\mathfrak{S}$ *siten, että* $A\cup B\subset C$ *ja*
(2) $A\in\mathfrak{S}$, $\lambda\in\mathbb{K}\implies\exists\,B\in\mathfrak{S}$ *siten, että* $\lambda A\subset B$,

niin $\{A^\circ \mid A\in\mathfrak{S}\}$ *on* $\mathfrak{S}$*-topologiassa origon ympäristökanta.*

c) Jos $\mathfrak{S}$ *toteuttaa ehdon*

$$\bigcup_{\mathfrak{S}}A=E,$$

niin $\mathfrak{S}$*-topologia on hienompi kuin heikko topologia* $\sigma(F,E)$.

Ratkaisu: a) Polaarit A° ovat aina balansoituja ja konvekseja, ja heikossa topologiassa rajoitetun joukon polaari on myös absorboiva, joten sen mittausfunktio on seminormi.

b) Kuulukoon $\varepsilon\bigcap_I A_i^\circ$ tutkittavan $\mathfrak{S}-$topologian määrittelevään ympäristökantaan

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}=\Big\{\varepsilon\bigcap_I A_i^\circ \;\Big|\; A_i\in\mathfrak{S},\ \varepsilon>0\ I \text{ äärellinen}\Big\}.$$

Ehdosta (1) seuraa induktiolla, että äärellisellä perheellä $\{A_i \mid i\in I\}\subset\mathfrak{S}$ on olemassa $C\in\mathfrak{S}$ siten, että $\bigcup_{i\in I}A_i\subset C$. Ehdon (2) nojalla voidaan valita $B\in\mathfrak{S}$ siten, että $\frac{1}{\varepsilon}C\subset B$. Nyt

$$B^\circ\subset\varepsilon C^\circ\subset\varepsilon\bigcap_{i\in I}A_i^\circ.$$

c) Riittää todistaa, että jokaisen pisteen $x\in E$ polaari $\{x\}^\circ=\{y\in F \mid |\langle x,y\rangle|\le 1\}$ on origon $\mathfrak{S}$-ympäristö. Olkoon siis $x\in E$. Oletuksen mukaan on olemassa $A\in\mathfrak{S}$, jolle $x\in A$. Silloin $A^\circ\subset\{x\}^\circ$.

0.0.76. *Todista suoraan (käyttämättä Alaoglun ja Bourbakin lausetta kuten kohdasa 7.40), että yhtäjatkuva joukko $A \subset E^*$ on heikosti rajoitettu.*

Ratkaisu: $A \subset E^*$ on yhtäjatkuva tasan silloin, kun $A \subset U^\circ$ jollekin $U \in \mathcal{U}_{\sigma(E,E^*)}$ (Ks. 7.40.)

Olkoon V jokin heikko ympäristö. Heikon ympäristön määrittelee ominaisuus, että on olemassa äärellinen joukko $S \subset E$, jolla $S^\circ \subset V$. Koska äärellinen joukko on rajoitettu, on olemassa luku $\lambda > 0$ siten, että $S \subset \lambda U$, jolloin

$$A \subset U^\circ \subset \lambda S^\circ \subset \lambda V.$$

Lopuksi voi huomata, että olisi riittänyt tarkastella pisteiden polaareja, kuten edellisessä tehtävässä tehtiin. □

0.0.77. *Olkoon E epätäydellinen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $\widehat{E}$ sen täydentymä. Osoita, että topologia $\sigma(E^*, \widehat{E})$ on aidosti hienompi kuin $\sigma(E^*, E)$ ja vastaava tulos pätee topologiselle duaalille E^*.*

Ratkaisu: Heikko topologia on sopeutuva, joten E' :n duaali on toisessa topologiassa E ja toisessa siitä eroava $\widehat{E}$. Topologiat eivät siis ole samat. Luonnollisesti hienompaa topologiaa vastaa isompi duaali.

0.0.78. *Todista lause 7.43, jonka mukaan avaruuden E Mackeyn topologia $\tau(E, F)$ on hienoin duaalipariin (E, F) sopeutuva topologia, jos duaalipari (E, F) separoi F:n.*

0.0.79. *Todista lause 7.44, jonka mukaan lokaalikonveksi avaruus E on tynnyriavaruus tasan silloin, kun sen topologia yhtyy dualiteetin (E, E^*) antamaan vahvaan topologiaan $b(E, E^*)$.*

Ratkaisu: Vahva topologia on perheen $\mathfrak{S} = \{A \subset E^* \mid A$ on balansoitu, konveksi ja heikosti kompakti$\}$ polaaritopologia. Tässä topologiassa jokainen tynnyri on origon ympäristö, sillä tynnyrin $T \subset E$ polaari T° on balansoitu, konveksi ja heikosti kompakti ja $T = T^{\circ\circ}$.

Jos oletetaan, että E on tynnyriavaruus, niin jokainen origon ympäristö $U \in \mathcal{U}_E$ sisältää tynnyrin, joka on balansoidun, konveksin, heikosti kompaktin polaarinsa polaari. □

0.0.80. *Olkoon E Banachin avaruus. Näytä, että $b(E, E^*) = \tau(E, E^*)$.*

Ratkaisu: Mackeyn ja Arensin lauseen seurauksen 7.44 mukaan avaruus on tynnyriavaruus tasan ehdolla $b(E, E^*) = \tau(E, E^*)$. Tynnyrilauseen 4.13 mukaan jokainen Fréchet'n avaruus, erityisesti jokainen Banach-avaruus on tynnyriavaruus. □.

0.0.81. *Todista lause 7.45, jonka mukaan jokainen tynnyriavaruus ja jokainen bornologinen avaruus on Mackeyn avaruus.*

0.0.82. *Todista, että jokaisessa $\mathcal{D}_K(\Omega) = \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ aliavaruustopologian eli kompaktin $\mathcal{C}^\infty$-konvergenssin topologian antavat normit*

$$\|\varphi\|_j = \|D^j \varphi\|_\infty = \sup\{|D^j \varphi(x)| \mid x \in \Omega\} \quad j \in \mathbb{N}.$$

0.0.83. *Ovatko Schwartzin testifunktioavaruuden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ määritelmässä käytetyt avaruudet $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ normeerautuvia? Entä itse testifunktioavatuus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?*

Ratkaisu: Avaruuksia $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$ käsiteltiin jo mm. tehtävässä 0.0.27 ja 0.0.28, joten normiavaruuksia ne eivät ole. ($\mathcal{C}_K^k(\mathbb{R})$ on kyllä normiavaruus, kun $n < \infty$). Myöskään Fréchet'n avaruuksien $\mathcal{D}_{K_n}(\mathbb{R})$ tarkka induktiivinen limes $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ei ole normiavaruus, ei edes metrisoituva. Metrisoituvuuden estää Bairen kategorialause, sillä $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on täydellinen, mutta suljettujen aitojen aliavaruuksiensa yhdisteenä selvästi Bairen 1. kategoriaa.

0.0.84. *Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{R}$ kompaktin osajoukon $K \subset \Omega$ etäisyys joukon Ω reunasta eli $d(K, \partial\Omega) = \inf\{d(k,\omega) \mid k \in K, \omega \in \partial\Omega\}$ on positiivinen.*

0.0.85. *Totea, että topologisessa vektoriavaruudessa nollaan suppenevan lukujonon $(\lambda_n)_\mathbb{N}$ ja rajoitetun jonon $(x_n)_\mathbb{N}$ tulojono $(\lambda_n x_n)_\mathbb{N}$ suppenee origoon.*

0.0.86. *Olkoon $P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ on enintään asteen n–1 polynomi$\}$ varustettuna luonnollisella äärellisulotteisen Hausdorff-vektoriavaruuden rakenteellaan. Olkoon $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ on polynomi$\}$ varustettuna tarkan induktiivisen limeksen rakenteella: $P = \varinjlim P_n$. Onko P metrisoituva tässä topologiassa τ? Onko P Montelin avaruus?*

Ratkaisu: Koska jokainen P_n on äärellisulotteinen, se on isomorfinen jonkin $\mathbb{R}^n$ kanssa ja siis tietenkin Banachin avaruus, joten P on $\mathcal{LB}$-avaruus ja siten bornologinen Montelin avaruus. Siis myös P on bornologinen Montelin avaruus, koska nämä ominaisuudet periytyvät tarkalle induktiiviselle limekselle (9.16). Sisäpisteettömien suljettujen osajoukkojensa yhdisteenä P_n on Bairen ensimmäistä kategoriaa, ja täydellisyytensä vuoksi siis metrisoitumaton.

0.0.87. *(Jatkoa) Tarkastellaan avaruudessa P myös lokaalikonveksia topologiaa τ_0, jonka määräävät seminormit $q_k(\sum \lambda_i x^i) = |\lambda_k|$. Onko tämä topologia metrisoituva? Entä Montel? Onko toinen topologioista τ ja τ_0 hienompi kuin toinen?*

Ratkaisu: Topologia τ_0 on tietenkin metrisoituva, määräytyyhän se numeroituvasta seminormiperheestä. Koska luonnolliset injektiot $P_i \to P$ ovat jatkuvia myös topologiassa τ_0, on τ on hienompi kuin τ_0. Koska toinen topologia on metrisoituva, toinen ei, niin ne eivät ole samat. τ on siis aidosti hienompi kuin τ_0. $\square$

0.0.88. *Osoita, että funktioavaruudet $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ ja $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ja yleisemminkin $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ja $\mathcal{D}(\Omega)$) ovat Montelin avaruuksia.*

Ratkaisu: Koska $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on tarkka induktiivinen limes avaruuksista $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, riittää osoittaa, että avaruudet $D_K(\mathbb{R})$ ovat Montelin avaruuksia. Fréchet'n avaruuksina ne ovat tynnyriavaruuksia, joten riittää todistaa, että niillä on Heinen ja Borelin ominaisuus eli jokainen suljettu, rajoitettu joukko on kompakti. Olkoon siis $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_K(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ suljettu ja rajoitettu. Olkoon $f \in \mathcal{H}$ ja x_1 ja $x_2 \in K$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|Df\|_\infty |x_1 - x_2|. \tag{0.1}$$

Ylemmille derivaatoille saadaan samaan tapaan

$$|D^k f(x_1) - D^k f(x_2)| \leq \|D^{k+1} f\|_\infty |x_1 - x_2|. \tag{0.2}$$

Sovelletaan Ascolin lausetta (Liite II.0.0.114). Lauseen oletukset ovat voimassa: $\mathbb{R}$ on täydellinen metrinen ja K kompakti metrinen ja $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K, X) = \{f : K \to X \mid f$ on jatkuva$\}$. Ascolin lauseen mukaan siis seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $\mathcal{H}$ on *relatiivikompakti* eli $\overline{\mathcal{H}}$ on kompakti **sup-normin** suhteen.
(2) (a) $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva ja
(b) $\mathcal{H}$ on *pisteittäin relatiivikompakti* eli $\mathcal{H}(x) \subset \mathbb{R}$ on relatiivikompakti (eli rajoitettu, ollaanhan $\mathbb{R}$:ssä) kaikilla $x \in K$.

Epäyhtälö (0.1) implikoi ehdot (a) ja (b), joten (sup-normissakin!) suljettu joukon $\mathcal{H}$ sukeuma **sup-normin** suhteen $\overline{\mathcal{H}}$ on kompakti **sup-normin** suhteen. Sama toimii epäyhtälön (0.2) nojalla myös derivaattojen sup-normeille, joten $\mathcal{H}$ on relatiivikompakti jokaisen normin $\|D^k f\|_\infty$ suhteen.

Näistä tiedoista on ehkä hankalaa todistaa suoraan, että $\mathcal{H}$ on kompakti avaruudelta $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ perimässään lokaalikonveksissa topologiassa, jonka virittävät kaikki derivaattojen sup-normit $\|D^n f\|_\infty$, mutta koska tämä topologia on metrisoituva, niin riittää todistaa, että $\mathcal{H}$ on täysrajoitettu avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Tutkittavan topologian määrittelee myös kasvava jono normeja $|||\cdot|||_n = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2 + \cdots + |||\cdot\|_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jo todistetun perusteella $\mathcal{H}$ sisältyy johonkin kompaktiin, siis erityisesti täysrajoitettuun joukkoon jokaisen normin $\|f\|_n = \|D^n f\|_\infty$ mielessä erikseen, joten on kullakin $n \in \mathbb{N}$ olemassa $\mathcal{H}$:n (äärellinen!) peite osajoukoilla $\mathcal{H}_{n,i} \subset \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots m_n$ siten, että kunkin peitepalan $\mathcal{H}_{n,i}$ halkaisija $\|\cdot\|_n$-mielessä on enintään ε:

$$\|D^n f - D^n g\|_n < \varepsilon \text{ kaikilla } f, g \in \mathcal{H}_{n,i}.$$

Tavoitteena on konstruoida $\mathcal{H}$:n (äärellinen!) peite osajoukoilla $\mathcal{H}_{n,i} \subset \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots m_n$ siten, että kunkin peitepalan $\mathcal{H}_{n,i}$ halkaisija $|||\cdot|||_n$-mielessä on enintään ε. Tällaisen peitteen muodostavat leikkaukset $\mathcal{H}_{0,i_0} \cap \mathcal{H}_{1,i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{n,i_n}$, missä indeksit i_j käyvät läpi kaikki mahdolliset arvot, siis kukin $i_j \in \{1, \dots, m_j\}$.

Laskimme yksinkertaisuuden vuoksi avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, mutta päättely yleistyy kyllä avaruuteen $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ainoa muutos tulee epäyhtälöihin (0.1) ja (0.2), joihin tulee lisätä joukosta Ω riippuvat multiplikatiiviset vakiot. $\square$

0.0.89. *Osoita, että kaksi säännöllistä distribuutiota yhtyvät aina ja vain, kun vastaavat funktiot yhtyvät melkein kaikkialla.*

0.0.90. *Todista huomautuksen 10.3 väite, jonka mukaan lineaarimuoto $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ on jonojatkuva, jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa:*

Jos $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jono testifunktioavaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$ ja on olemassa kompakti $K \subset \Omega$ jolla $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ *kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja lisäksi kaikilla $n \in \mathbb{N}$*

$$D^n \varphi_k(x) \to 0 \ \textit{tasaisesti } K\textit{:ssa},$$

niin $\langle \varphi_k, \Lambda \rangle \to 0$.

0.0.91. *Todista, että $\mathcal{C}^\infty$-funktion f derivatta on sama kuin sen distribuutioderivaatta — oikein tulkittuna.*

0.0.92. *Todista huomautus 10.7, jonka mukaan Heavisiden porrasfunktion derivaatta on δ_0.*

0.0.93. *Olkoon $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Osoita laskemalla tai kumoa, että*

$$D(f\Lambda) = Df\,\Lambda + f\,D\Lambda.$$

Ratkaisu: Distribuution $\Lambda \in D^*$ derivaatta on distribuutio $D\Lambda := -\Lambda \circ D$, ts. $\langle \varphi, D\Lambda \rangle := -\langle D\varphi, \Lambda \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Lasketaan:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, D(f\Lambda) \rangle &= -\langle D\varphi, f\Lambda \rangle \\
&= -\langle fD\varphi, \Lambda \rangle \\
&= -\langle D(f\varphi) - (Df)\varphi, \Lambda \rangle \\
&= -\langle D(f\varphi), \Lambda \rangle + \langle \varphi(Df), \Lambda \rangle \\
&= \langle f\varphi, D\Lambda \rangle + \langle \varphi, (Df)\Lambda \rangle \\
&= \langle \varphi, fD\Lambda \rangle + \langle \varphi, (Df)\Lambda \rangle = \langle \varphi, Df\,\Lambda + f\,D\Lambda \rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

0.0.94. *Osoita, että distribuutioderivaatan mielessä*

$$\frac{d}{dx} \log|x| = v.p.\frac{1}{x}.$$

Ratkaisu: Esimerkin 10.5 mukaan merkintä v.p. tarkoittaa Cauchyn pääarvoa joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokaalisti integroituvalle funktiolle:

$$v.p. \int_\infty^\infty f = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_\infty^{-\varepsilon} f + \int_\varepsilon^\infty f \right)$$

Distribuutiona merkintä $v.p.f$ tarkoittaa lineaarimuotoa

$$\mathcal{D} \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \varphi, v.p.f \rangle = v.p \int_\infty^\infty f\varphi,$$

jos tämä on olemassa ja jatkuva. Klassinen esimerkki 10.5 on $v.p.\frac{1}{x}$.

Distribuutioderivaatan määritelmän mukaan $\langle D \log|x|, \varphi \rangle = -\langle \log|x|, D\varphi \rangle$. Koska $\log|x|$ on lokaalisti integroituva joukossa $\mathbb{R}$[83], on oikea puoli tulkittavissa distribuutioksi integraalina $-\int_{-\infty}^\infty \log|x|\; D\varphi\, dx$ ja saamme:

$$\begin{aligned}
\langle D \log|x|, \varphi \rangle &= -\int_{-\infty}^\infty \log|x|\; D\varphi\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \big(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\; D\varphi\, dx - \int_\varepsilon^\infty \log|x|\; D\varphi\, dx \big) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\; \varphi(x) + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \Big|_\varepsilon^\infty \log|x|\; \varphi(x) \right) \\
&= v.p. \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\; \varphi(x) - \Big|_\varepsilon^\infty \log|x|\; \varphi(x) \right) \\
&= v.p. \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \lim_{\varepsilon \to 0+} \big(\log(\varepsilon)\,(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) \big) = v.p. \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.
\end{aligned}$$

[83] $\mathbb{R}_+$:ssa $\int \log x = -x + x\log x$ on jopa jatkuva, onhan $\lim_{x \to 0}(-x + x\log x) = 0$.

0.0.95. *Tarkastellaan Fréchet'n avaruutta E ja $\mathcal{LF}$-avaruutta $F = \lim\limits_{\rightarrow} F_n$. Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa luonnollinen luku $k \in \mathbb{N}$ siten, että $T(E) \subset F_k$.*

Ratkaisu: Tarkastellaan joukkoja $H_n = \{(x, Tx) \in E \times F \mid Ty \in F_n\}$. Ne ovat kahden Fréchet'n avaruuden tulon suljettuja aliavaruuksia, siis Fréchet'n avaruuksia. Merkitään projektioita $\pi_n : H_n \to F : (x, y) \mapsto x$. Koska $\bigcup_n F_n = F$, niin $\bigcup_n H_n = T$ joten Bairen kategorialauseen mukaan jokin suljetuista joukoista H_n on sisäpisteellinen. Nytpä kuvaus $\pi_2 : Gr(T) \to F : (x, y) \mapsto y$ on jatkuva lineaarikuvaus kahden Fréchet'n avaruuden välillä, siis avoin kuvaus. Sellaisena se kuvaa sisäpisteellisen joukon $H_n \subset T$ sisäpisteelliseksi joukoksi $\pi_2(H_n)$, joka toisaalta on aliavaruus, siis koko F. Mutta $\pi_2(H_n) \subset F_n$.

0.0.96. *Oletetaan, että $(f_n)_{\mathbb{N}} \to f$ on suppeneva jono Fréchet'n avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja jono $(\Lambda_n)_{\mathbb{N}} \to \Lambda$ on suppeneva jono distribuutioiden avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. Osoita, että $(f_n\Lambda_n)_{\mathbb{N}} \to f\Lambda$ avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. Muista, että avaruus $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ on varustettu heikolla topologialla $w^* = \sigma(\mathcal{D}(\mathbb{R})^*, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$.*

Ratkaisu: Siirtymällä tarkastelemaan erotuksia $f_n - f$ ja $\Lambda_n - \Lambda$ voi olettaa, että $f = 0$ ja $\Lambda = 0$. Oletus $\Lambda_n \to 0$ merkitsee, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee $\langle \varphi, \Lambda_n \rangle \to 0$. Avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ topologian määräävät derivaattojen sup-normit kompakteissa joukoissa. Oletus $f_n \to 0$ merkitsee siis, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kompakteilla $K \subset \mathbb{R}$ pätee

$$\sup_K |D^k(f_n)| \to 0.$$

Distribuution ja funktion tulon määritelmän 10.21 mukaan väite merkitsee, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee

$$\langle \varphi, f_n\Lambda_n \rangle = \langle f_n\varphi, \Lambda_n \rangle \to 0.$$

Kuvaus $f_n \mapsto f_n\varphi$ on jatkuva $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, joten $f_n\varphi \to f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Kiinteällä $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bilineaarikuvaus

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \to \mathbb{C} : (f, \Lambda) \mapsto \langle \varphi, f\Lambda \rangle = \langle f\varphi, \Lambda \rangle$$

on siis kummankin muuttujansa funktiona erikseen jatkuva. Tasaisen jatkuvuuden periaatteeseen perustuvan huomautuksen 4.27 mukaan β on jonojatkuva, mikä riittääkin todistamaan väitteen. □

0.0.97. *Osoita, että kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, niin on olemassa kompaktit välit Q_i ja avoimet joukot Ω_i (i=1,2,...) siten, että*

(i) $Q_i \subset \Omega_i \subset \Omega$,
(ii) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$, *ja*
(iii) *mikään kompakti joukko $K \subset \Omega$ ei leikkaa useampaa kuin äärellisen monta joukkoa Ω_i.*

Ratkaisu: Konstruktio on yleisesti tunnettu ja löytyy analyysin kirjoista kohdasta, jossa puhutaan ykkösen osituksesta.

0.0.98. Todista ykkösen osituslemma 11.6: Olkoon $(\Omega_i)_{i\in I}$ perhe avoimia joukkoja $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ ja $\Omega = \bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Silloin on olemassa jono $\mathcal{D}(\Omega)$-funktioita $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

a) jokaisen funktion ψ_n kantaja sisältyy johonkin avoimista joukoista Ω_i.
b) $\sum_{n\in\mathbb{N}}\psi_n = 1$ joukossa Ω.
c) Jokaista kompaktia joukkoa $K \subset \Omega$ kohti on olemassa avoin joukko $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^{m}\psi_n = 1$ joukossa A.

Todistus. Ratkaisu: Kuten edellinen.

0.0.99. *Olkoon* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ *distribuutio. Olkoon*

$$W = \bigcup\{\Omega' \overset{avoin}{\subset} \Omega \mid \langle f,\Lambda\rangle = 0,\ kun\ \operatorname{supp} f \subset \Omega'\}.$$

Osoita, että $\langle f,\Lambda\rangle = 0$, *kun* $\operatorname{supp} f \subset W$.

Ratkaisu: Perhe $(\Omega_i)_{i\in I} = \{\Omega' \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f,\Lambda\rangle = 0,\ \text{kun}\ \operatorname{supp} f \subset \Omega'\}$ on perhe avoimia joukkoja $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ ja $W = \bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Tehtävän 0.0.98 eli *ykkösen osituslemman* 11.6 mukaan on olemassa jono $\mathcal{D}(\Omega)$-funktioita $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

a) $\forall n \in \mathbb{N}\,\exists i \in I$ siten, että $\operatorname{supp}\psi_n \subset \Omega_i$.
b) $\sum_{n\in\mathbb{N}}\psi_n = 1$ joukossa W.
c) Jokaista kompaktia $K \subset W$ kohti on olemassa avoin $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^{m}\psi_n = 1$ joukossa A.

Olkoon $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ja $K = \operatorname{supp} f \subset W$. Koska K on kompakti, kohta c) soveltuu. Voi olettaa, että $A \subset W$ (leikkaa W:llä jos tarvitaan). Joukossa A on

$$f = f\cdot 1 = \sum_{n=1}^{m}\psi_n f,$$

ja A:n ulkopuolellakin $f = \sum_{n=1}^{m}\psi_n f$, nimittäin 0. Siis

$$\langle f,\Lambda\rangle = \sum_{n=1}^{m}\langle\psi_n f,\Lambda\rangle.$$

Mutta jokainen $\langle\psi_n f,\Lambda\rangle$ on 0, koska $\operatorname{supp}\psi_n f \subset \operatorname{supp}\psi_n \subset \Omega_i$ jollain $i \in I$. □

0.0.100. *Olkoon* $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *distribuutio. Osoita, että*

a) *Jos* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *ja* $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$, *niin* $\langle\varphi,\Lambda\rangle = 0$.
b) *Jos* $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *ja* $\psi(x) = 1$ *jossain avoimessa joukossa* $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$, *niin* $\Lambda\psi = \Lambda$.

Ratkaisu: a) Määritelmän mukaan $\operatorname{supp}\Lambda = \mathbb{R} \setminus W$, missä

$$W = \bigcup\{\Omega' \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f,\Lambda\rangle = 0,\ \text{kun}\ \operatorname{supp} f \subset \Omega'\}.$$

Jos siis $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$, niin $\operatorname{supp} f \subset W$, joten edellisen tehtävän nojalla $\langle f,\Lambda\rangle = 0$

b) Olkoon $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$. Näytetään, että $\Lambda\psi - \Lambda = 0$. Koska $\psi(x) = 1$ joukossa $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$, niin kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $x \in A$ on $\varphi(x) - (\psi\varphi)(x) = \varphi(x) - (1\varphi)(x) = 0$. Siis $\operatorname{supp}(\varphi - \psi\varphi) \cap \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$.

Kohdan a) nojalla on siis $\langle\varphi-\psi\varphi,\Lambda\rangle = 0$ eli $\langle\varphi,\Lambda\rangle = \langle\psi\varphi,\Lambda\rangle = \langle\varphi,\psi\Lambda\rangle$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. □

0.0.101. *Olkoon* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *ja* $K = [-r,r]$. *Oletetaan, että* $D^k\varphi(0) = 0$ *kaikilla* $k = 0,1,\ldots,N$ *ja* $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \le \eta$. *Osoita, että tällöin on kaikilla* $k \le N$ *ja* $x \in K$ *voimassa*

$$|D^k\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-k}.$$

Ratkaisu: Induktio k:n suhteen:
I) $(k = 0)$: $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \le \eta$ antaa kaikilla $x \in K$: $|D^{N-0}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-0)}$.
II) Induktio-oletus: kaikilla $x \in K$: $|D^{N-k}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-k)}$.
Induktioväite: kaikilla $x \in K$: $|D^{N-k-1}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-k-1)}$, kunnes $k = N$.
Askel, tapaus $0 < x < r$. Koska $D^k\varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0,1,\ldots,N$,

$$\begin{aligned}
|D^{N-k-1}\varphi(x)| &= |\int_0^x D^{N-k}\varphi(t)\,dt| \\
&\le \int_0^x |D^{N-k}\varphi(t)|\,dt \\
&\le \int_0^x \eta|t|^{N-(N-k)}\,dt \\
&= \eta\int_0^x t^k\,dt = \eta\tfrac{1}{k}x^{k+1}
\end{aligned}$$

Askel, tapaus $-r < x < 0$ käsitellään vastaavasti. □

0.0.102. Vertaa, mitä yhteistä ja eroa on tasaisen rajoituksen periaatteella 4.24 ja Ascolin ja Arzela'n lemmalla 15.25 ja Ascolin lauseella 15.24 (Ks. liite II.).

0.0.103. Olkoon $(\Lambda_n)_\mathbb{N} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ jono distribuutioita siten, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on olemassa raja-arvo $\langle\varphi,\Lambda\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\varphi,\Lambda_n\rangle \in \mathbb{C}$. Osoita tasaisen rajoittuneisuuden periaatteen 4.24 avulla, että $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ ja $D^k\Lambda_n \to D^k\Lambda$ avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)^*$ standarditopologiassa.

Ratkaisu: Avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)^*$ standarditopologia on heikko topologia $\sigma(\mathcal{D}(\Omega)^*, \mathcal{D}(\Omega))$.
(a) Λ on tietenkin lineaarinen. Tarkastetaan sen jatkuvuus: Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti. Tarkastellaan kuvausperhettä $(\Lambda_n\big|_K)_\mathbb{N} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)^*$. Se on pisteittäin rajoitettu, sillä kussakin "pisteessä" $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ joukko $\{\langle\varphi,\Lambda_n\rangle \bigm| n \in \mathbb{N}\}$ on suppenevana jonona rajoitettu lukujoukko. Koska $\mathcal{D}_K(\Omega)$ on Fréchet'n avaruus, perhe on siis Banachin ja Steinhausin periaatteen nojalla yhtäjatkuva: Jokaiselle ympäristölle $B(0,r) \in \mathcal{U}_\mathbb{C}$ on olemassa sellainen ympäristö $U_r \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on

$$\langle U_r, \Lambda_n\rangle \subset B(0,r)$$

joten kaikilla $\varphi \in U_r$:

$$|\langle\varphi,\Lambda\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle\varphi,\Lambda_n\rangle| \le r$$

Λ:n rajoittumat avaruuksiin $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ovat siis jatkuvia, joten $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(b) Oletuksen $\langle\varphi,\Lambda\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\varphi,\Lambda_n\rangle \in \mathbb{C}$ nojalla siis ainakin $\Lambda_n \to \Lambda$. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on siis distribuutioderivaatan ja heikon topologian määritelmän mukaan

$$\langle\varphi, D^k\Lambda_n\rangle = (-1)^k\langle D^k\varphi,\Lambda_n\rangle \to (-1)^k\langle D^k\varphi,\Lambda\rangle = \langle\varphi, D^k\Lambda\rangle,$$

eli $D^k\Lambda_n \to D^k\Lambda$. (Tämän saa tietysti myös derivoinnin jatkuvuudesta, joka todistetaan samalla tavalla.)

0.0.104. *Päteekö* $\langle\varphi, \Lambda\rangle = 0 \implies \varphi\Lambda = 0,$ *kun* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *ja* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$*?*

Ratkaisu: $\varphi\Lambda = 0$ merkitsee tulon $\varphi\Lambda$ määritelmän mukaan, että $\langle\psi\varphi, \Lambda\rangle = \langle\psi, \varphi\Lambda\rangle = 0$ kaikille $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Valitaan konvolouutiosilotuksella funktiot $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ siten, että $\psi_n\varphi \to \varphi$ avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$. Silloin $0 = \langle\psi_n\varphi, \Lambda\rangle \to \langle\varphi, \Lambda\rangle$, joten $\varphi, \Lambda\rangle = 0$.

Toisensuuntainen johtopäätös ei tietenkään päde. Vastaesimerkin saa jo funktioista eli säännöllisistä distribuutioista: Olkoon $\Lambda = \Lambda_\psi$, missä $\psi(x) = 1$ välillä $[-1, 1]$, muuten 0. Olkoon $\varphi(x) = x$ välillä $[-1, 1]$, muuten 0.

0.0.105. *Lausu Diracin δ-mitta eksplisiittisesti jatkuvan funktion sopivan (mahdollismman alhaisen) kertaluvun derivaattana.*

Ratkaisu: Huomautuken 10.7 eli harjoitustehtävän 0.0.92 mukaan δ_0 on Heavisiden porrasfunktion distribuutioderivaatta. Porrasfunktio H on jatkuvan funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ x, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$ distribuutioderivaatta. Siis $\delta_0 = D^2 f$. □

0.0.106. *(Kahden funktion konvoluutio). Todista huomautus 12.3: Jos merkitsemme $\tau_x(g)$:llä funktiota g siirrettynä x:n verran oikealle: $\tau_x(g)(t) = g(t-x)$, ja merkitsemme $\tilde{g}$:lla funktion g peilikuvaa $\tilde{g}(t) = g(-t)$, niin $\tau_x(\tilde{g})(t) = g(x-t)$ ja konvoluution määritelmä saa tiiviin muodon*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \tau_x(\tilde{g})(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f\, \tau_x(\tilde{g}) = \langle\tau_x(\tilde{g}, \Lambda_f\rangle.$$

Ratkaisu: Määritelmän 12.2 mukaan kahden funktion $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvoluutio on funktio

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\, dt.$$

Säännöllisen distribuution määritelmän $\langle\varphi, \Lambda_f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\varphi$, mukaan siis

$$\langle\tau_x(\tilde{v}), \Lambda_u\rangle = \int_{\mathbb{R}} u\tau_x(\tilde{v}) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\tau_x(\tilde{v})(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)\tilde{v}(t-x)\, dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\, dt. \quad \square$$

0.0.107. *Huomautus 12.4 sanoo, että funktioiden konvoluutiolla on joukko reaalianalyysin kirjoista löytyviä hyviä ominaisuuksia. Täydennä huomautuksen 12.4 listaa ja perustele haluamasi kohdat laskemalla tai tai viittaamalla sopiviin lähdeteoksiin.*

Ratkaisu: Sanakirja antaa käännökset "convolution"= kierre, konvoluutio, monimutkaisuus, poimu", joista viimeinen on paras; saksaksihan konvoluutio on "Faltung".

Viitataan sopimattomaan lähdeteokseen - Wikipediaan/Wolfram math worldiin:
http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution
http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html
ja edelleen Googlen kautta eri kielisiin sivuihin, esim.
http://fi.wikipedia.org/wiki/Konvoluutio
http://de.wikipedia.org/wiki/Faltung (Mathematik)

http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=6331

0.0.108. *Perustele itsellesi, että jos u ja v ovat joidenkin riippumattomien satunnaismuuttujien jakaumien tiheysfunktioita, niin niiden konvoluutio on satunnaismuuttujien summan jakauman tiheysfunktio. Millainen on vastaava kaava diskreeteille satunnaismuuttujille? Entä jos toinen on diskreetti, toinen jatkuva?*

0.0.109. *(Distribuution ja funktion konvoluutio). Olkoon* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *ja* Λ *kompaktikantajainen distribuutio sekä* $x \in \mathbb{R}$. *Todista, että jos* $\operatorname{supp} \Lambda \cap (x - \operatorname{supp} \psi) = \emptyset$, *niin* $(\Lambda * \psi)(x) = 0$.

Vihje: Määritelmän mukaan $(\Lambda * \psi)(x) = \langle \tau_x \tilde{\psi}, \Lambda \rangle$. Lisäksi $\operatorname{supp}(\tau_x(\tilde{\psi})) = (x - \operatorname{supp} \psi)$. Erilliset kantajat takaavat, että $\langle \tau_x \tilde{\psi}, \Lambda \rangle = 0$.

0.0.110. *Huomautuksen 10.7 eli tehtävän 10.7 mukaan Heavisiden porrasfunktion H derivaatta tavallisessa mielessä on mk. 0 ja distribuutiomielessä* δ_0.
Osoita, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$
b) $D\delta_0 * H = \delta_0$.
c) $\Lambda_1 * D\delta_0 = 0$, *missä* Λ_1 *on vakiofunktiota 1 vastaava säännöllinen distribuutio.*
d) *On olemassa distribuutiot* Λ_a, Λ_b *ja* $\Lambda_c \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, *joilla*

$$(\Lambda_a * \Lambda_b) * \Lambda_c \neq \Lambda_a * (\Lambda_b * \Lambda_c).$$

Ratkaisu: a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$.
b) $D\delta_0 * H = \delta_0 * DH = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, sillä $\delta_0 * \Lambda = \Lambda$ kaikille Λ
c) $\Lambda_1 * D\delta_0 = D\Lambda_1 * \delta_0 = D\Lambda_1 = 0$
d) $\Lambda_1 * (D\delta_0 * H) = \Lambda_1 * \delta_0 = 1$, mutta $(\Lambda_1 * D\delta_0) * H = 0 * H = 0$.

0.0.111. *Osoita, että* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *on Frèchet'n avaruus.*

0.0.112. *Onko* e^x *hitaasti kasvava distribuutio? Entä* $e^x \cos(e^x)$? *(Onko johtopäätöksesi ristiriidassa Hahn-Banachin lauseen kanssa?)*

Ratkaisu: a) Ainakaan $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^x\, dx$ ei ole määritelty kaikille nopeasti väheneville funktioille φ, esimerkiksi ei funktiolle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jolle $\varphi_0(x) = e^{-|x|/2}$, kun $|x| \geq 1$. Mutta onko tämä vastaus kysymykseen? Ajatellaan tarkemmin. Jos $\Lambda = e^x$ olisi hitaasti kasvava distribuutio, niin se olisi erityisesti myös Schwartzin distribuutio (luku 13.1) ja $\langle \varphi, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^x\, dx$ ainakin kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Selvitetään, voidaanko tämä jatkaa jatkuvaksi lineaarimuodoksi avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Koska $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on tiheässä $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:ssä, niin jatkamisen mahdollisuus on yhtäpitävää $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-jatkuvuuden kanssa. Tehtäväksi jää siis osoittaa lineaarikuvauksen $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K} : \langle \varphi, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^x\, dx$ epäjatkuvuus avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indusoimassa topologiassa. Valitaan apufunktiot $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, joilla $0 \leq \psi_n \leq 1$, $\operatorname{supp} \psi \in [-2n, 2n]$ ja $\psi = 1$ välillä $[-n, n]$. Nyt $\psi_n \varphi_0 \to \varphi_0$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ja erityisesti $(\psi_n \varphi_0)_{\mathbb{N}}$ on Cauchy- jono avaruuteen $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ indusoituneessa aliavaruustopologiassa, mutta $(\langle \psi_n \varphi_0, \Lambda \rangle)_{\mathbb{N}}$ ei suppene, vaan

$$\langle \psi_n \varphi_0, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_n \varphi_0 \cdot e^x\, dx \to \infty,$$

joten Λ ei ole siinä topologiassa jatkuva. $\square$

b) Myöskään $e^x \cos(e^x)$ ei ole hitaasti kasvava distribuutio. Syy on periaatteessa sama kuin kohdassa a). $\cos(e^x) \geq \frac{1}{2}$, kun $2k\pi - \frac{1}{2} \leq e^x \leq 2k\pi + \frac{1}{2}$ eli, kun $\log(2k\pi - \frac{1}{2}) \leq x \leq \log(2k\pi + \frac{1}{2})$, siis väleillä, joiden pituudet ovat, kun $k > 0$, väliarvolauseen nojalla $\log(2k\pi + \frac{1}{2}) - \log(2k\pi - \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{10k}$, siis yhteensä ∞. Valitaan $C^\infty-$funktio ψ, joka on 1 näillä väleillä ja 0, kun $\cos(e^x)$ on negatiivinen. Nyt $\varphi_0\psi$ tekee samat palvelukset kuin φ_0 a)-kohdassa.

0.0.113. *Miksi seuraavat ovat hitaasti kasvavia distribuutioita:*

a) *kompaktikantajaiset distribuutiot*

b) *positiiviset Borel-mitat μ, joilla on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k} < \infty$$

c) *mitalliset funktiot g, joilla on olemassa $p \in [1, \infty[$ ja $N > 0$ siten, että*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^N} \right)^p < \infty \qquad eli \qquad \frac{g(x)}{(1+|x|^2)^N} \in L_p(\mathbb{R}).$$

d) *polynomit.*

Vastaus: (a) Olkoon $K = \operatorname{supp} \Lambda$ kompakti. Valitaan apufunktio $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ joka saa arvon 1 avoimessa joukossa $U \supset K$. Olkoon

$$\langle f, \tilde{\Lambda} \rangle = \langle f\psi, \Lambda \rangle$$

Jos $f_i \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, niin $f_i\psi \to 0$ avaruuden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ topologiassa, joten $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. Toisaalta kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on $\langle f, \tilde{\Lambda} \rangle = \langle f, \Lambda \rangle$. $\square$

(b) Olkoon μ Borel-mitta, ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k} < \infty$. Pitää näyttää, että $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$ on jatkuva avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa. Oletetaan $f_j \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, jolloin erityisesti $\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty \to 0$. Nyt

$$|\langle f_j, \mu \rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\, d\mu| = |\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|x|^2)^k}{(1+|x|^2)^k} f_j(x)\, d\mu| \leq \underbrace{\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty}_{\to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k}}_{<\infty}.$$

(c) Tässä $\langle \varphi, \Lambda_g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi g \, dx$. Tapaus $p = 1$ on erikoistapaus kohdasta (b). Jos taas $p \in]1, \infty[$, niin muistetaan *Hölderin epäyhtälö*, jonka mukaan: ”Jos $p > 1$ ja $q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sekä $f \in L^p$ ja $g \in L^q$, niin

$$|\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu| \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.''$$

Jaetaan integroitava sopivasti tekijöiksi, käytetään tunnettua Hölderin epäyhtälöä ja muistetaan, että tavoitteena on $|\langle \varphi, \Lambda_g \rangle| \leq C \|D^k \varphi(x)(1+|x|^2)^N\|_\infty$ joillekin N, k

ja C.

$$
\begin{aligned}
|\langle\varphi, \Lambda_g\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dx| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(1+|x|^2)^N \frac{g(x)}{(1+|x|^2)^N}\, dx| \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^N}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\text{C=vakio}} \\
&\le C \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^M \cdot (1+|x|^2)^{N-M}\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\|\varphi(x)(1+|x|^2)^M\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left|(1+|x|^2)\right|^{(N-M)q}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{vakio}<\infty \text{ kun } M \text{ riittävän suuri}}.
\end{aligned}
$$

(d) Polynomi toteuttaa edellisen kohdan ehdon. □

0.0.114. *Todista lauseen 13.13 kohdat (d) ja (e).*

Ratkaisu: Olkoot f, $g \in L_1(\mathbb{R})$ ja x, $t \in \mathbb{R}$. Väitteet ovat:

(d) $(f \hat{*} g)\hat{} = \hat{f}\,\hat{g}$

(e) $(\frac{f}{\lambda})\hat{}(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)$, kun $\lambda > 0$, missä merkintä $\frac{f}{\lambda}$ tarkoittaa funktiota $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$

Kummankin kohdan todistus on suora lasku:

$$(f\hat{*}g)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\ dm(y)$$

$$
\begin{aligned}
(f\hat{*}g)\hat{}(t) = \int_{x\in\mathbb{R}} (f\hat{*}g)(x)e^{-ixt}\, dm(x) &= \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\ dm(y)e^{-ixt}\ dm(x) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}}\int_{x\in\mathbb{R}} f(x-t)g(y)\, e^{-ixt}\, dm(x)dm(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} g(y) \int_{x\in\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{-ixt}\, dm(x)dm(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} g(y)e^{-ity}\hat{f}(t)dm(y) \\
&= \hat{f}(t)\int_{y\in\mathbb{R}} g(y)e^{-ity}dm(y) \\
&= \hat{f}(t)\hat{g}(t)
\end{aligned}
$$

$$\hat{f}(\lambda t) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)e^{ix\lambda t}\, dm(x) \overset{u=\lambda x}{=} \int_{u\in\mathbb{R}} f(\tfrac{u}{\lambda})e^{-iyt}\, \frac{dm(u)}{\lambda} = \tfrac{1}{\lambda}\cdot(\tfrac{f}{\lambda})\hat{}(t).$$

Liite: Yhtäjatkuvat ja täysrajoitetut kuvausperheet metrisissä avaruuksissa, Ascolin lause ja normaaliperhepäättely

Määritelmä 15.20. Olkoon $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ joukko funktioita eli *funktioperhe* metristen avaruuksien X ja Y välillä sekä $x_0 \in X$. Tässä on merkitty $\mathcal{F}(X, Y) = Y^X =$ kaikkien funktioiden joukko.

(1) Perheen $\mathcal{H}$ funktiot ovat *yhtäjatkuvia pisteessä* x_0, eli perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva pisteessä* x_0, jos kaikki funktiot $f \in \mathcal{H}$ ovat jatkuvia pisteessä x_0 siten, että jatkuvuuden standardimääritelmässä kullakin ε voidaan δ valita niin pieneksi, että se kelpaa kaikille $f \in \mathcal{H}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \le \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon.$$

(2) Perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva*, jos $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in X$.

(3) Perhe $\mathcal{H}$ on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kullakin ε kelpaa sama δ kaikille $f \in \mathcal{H}$ ja kaikille $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in X\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \le \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon.$$

Rajoitetun joukon sulkeuma on äärellisulotteisessa avaruudessa $\mathbb{K}^n$ kompakti Heinen ja Borelin tunnetun lauseen mukaan, ja Rieszin lause 6.15 kertoo meille, että ääretönulotteisessa avaruudessa asia on toisin. Tämä asiantila antaa aiheen antaa nimen joukolle, jonka sulkeuma on kompakti. Asetamme samalla toisenkin lähisukuisen määritelmän.

Määritelmä 15.21. (1) Topologisen avaruuden X osajoukko K on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{K}$ on kompakti, eli jos K sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon.

(2) Metrisen avaruuden X osajoukko K on *täysrajoitettu*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa joukon K peite äärellisen monella $\varepsilon-$säteisellä pallolla $B(x, \varepsilon)$, missä $x \in X$.

Huomautus 15.22. (1) Täysrajoitettuneisuuden määritelmässä voi yhtä lailla vaatia, että jokainen x kuuluu joukkoon K.

(2) Relatiivikompaktius ja täysrajoittuneisuus periytyvät osajoukolle ja sulkeumalle.

(3) Metrisen avaruuden osajoukolle kompaktius ja jonokompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(4) Täydellisen metrisen avaruuden osajoukolle täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(5) Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle rajoittuneisuus, täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

Määritelmä 15.23. Olkoon X joukko ja Y metrinen avaruus.

(1) Funktioperhe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ on *pisteittäin rajoitettu*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ kuvien joukko $\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\} \subset Y$ on rajoitettu.

(2) Vastaavasti määritellään käsitteet *pisteittäin täysrajoitettu* ja *pisteittäin relatiivikompakti* funktioperhe.

Lause 15.24. (Ascolin lause) *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X kompakti. Tällöin joukolle jatkuvia funktioita $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ seuraavat kaksi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathcal{H}$ on avaruuden $\mathcal{C}(X,Y)$* sup-*metriikassa*

$$d(f,g) = d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

täysrajoitettu joukko.

(2) *$\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin täysrajoitettu funktioperhe.*

Ratkaisu: Ascolin lauseesta on usein käytössä erikoistapaus, jossa maalipuolen avaruus Y on $\mathbb{R}$ (tai yhtä lailla $\mathbb{K}^n$). Tässä on oleellista, että maalipuolella täysrajoittuneisuus nyt merkitsee samaa kuin relatiivinen (jono-) kompaktisuus, onhan $\mathbb{R}^n$ täydellinen. Myös $\mathcal{C}(X,Y)$ on tässä tilanteessa täydellinen, joten sielläkin täysrajoittuneisuus liittyy jonojen osajonoihin:

Seuraus 15.25. (Ascolin ja Arzelán lemma) *Olkoon $\mathcal{H}$ pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva perhe funktioita $X \to \mathbb{R}^n$, missä X on kompakti metrinen avaruus. Tällöin jokaisella jonolla $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin jatkuvaa funktiota $f : X \to \mathbb{R}^n$.*

Huomautus 15.26. (Normaaliperhepäättely) Kompleksianalyysissä Ascolin ja Arzelán lemmaa 15.25 on tapana sanoa *normaaliperhepäättelyksi*. Tarkasteltavana on tällöin yleensä jono jossakin alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ei siis kompaktissa joukossa — määriteltyjä analyyttisiä funktioita $f_i : \Omega \to \mathbb{C}$. Oletuksena on, että jono on *tasaisesti rajoitettu kompakteissa joukoissa*, ts. että jokaisella kompaktilla $K \subset \Omega$ on olemassa vakio $M_K > 0$ siten, että kaikilla $x \in K$ ja $i \in \mathbb{N}$ on

$$|f_i(x)| \leq M_K.$$

Väitteenä on, että on olemassa analyyttinen funktio

$$f : \Omega \to \mathbb{C},$$

jota kohti jokin osajono $(f_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset \Omega$.

Päättely perustuu Ascolin ja Arzelán lemman 15.25 lisäksi siihen Cauchyn integraalikaavasta saatavaan tietoon, että kompakteissa joukoissa tasaisesti rajoitettu funktioperhe on yhtäjatkuva, ja että analyyttisistä funktioista koostuvan jonon raja-arvo on analyyttinen, jos suppeneminen on tasaista kompakteissa osajoukoissa.

Kirjallisuutta

[1] Kahanpää, Lauri: *Funktionalianalyysi. Jyväskylän yliopisto.*
[2] Köthe, Gottfried: *Topologische Vektorräume I. Springer 1960 ja 1966.*
[3] Rudin: *Functional Analysis. Mc Graw Hill 1973.*
[4] Schaefer, Helmut H: *Topological vector spaces. 2nd ed. Springer 1999.*
[5] Schwartz, Laurent: *Théorie des distributions. Hermann, 2 vols., 1950/195, new edn. 1966.*

Hakemisto