ESITYSTEORIA **Harjoitus 5 / 2009**
D 355 tiistai 27.10 klo. 8-10.

1. Redusointi / Serre

1. Olkoon $f : G \to V$ kuvaus äärelliseltä ryhmältä G vektoriavaruudelle V. Osoita, että kaikilla $s \in G$ pätee

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(sg).$$

(Huomaa muuten, että tulos yleistyy: Riittää, että V on Abelin ryhmä. Miksi Abelin?)

Määritelmä: Seuraavassa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. *Sisätulo* vektoriavaruudessa V on tunnetusti kuvaus $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$, jolla kaikille $u, v, w \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

(ML-1) $(\lambda u|v) = \lambda(u|v)$
(ML-2) $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$
(c-sym) $(u|v) = \overline{(v|u)} = (u|v)$:n kompleksikonjugaatti (=$(u|v)$, jos $(u|v) \in \mathbb{R}$)
(pos) $(u|u) \geq 0$
(def) $(u|u) = 0 \implies u = 0$.

2. Osoita, että äärellisulotteinen vektoriavaruus voidaan aina varustaa sisätulolla. (Käytä kantaa!) (Halukkaille pohdittavaa: Onko äärellisulotteisuus oleellista?)

3. Osoita, että jos $\mathbb{C}$-sisätuloavaruuden V sisätulo $(\cdot|\cdot)$ on invariantti lineaarikuvauksen $T : V \to V$ suhteen, ts.

$$(Tx|Ty) = (x|y) \quad \forall x, y \in V,$$

niin ortonormaalissa kannassa muodostettu matriisi $\mathrm{Mat}(T)$ on *unitaarinen* eli $\mathrm{Mat}\, T^{-1} = \mathrm{Mat}\, T^{\dagger}$. ($\mathrm{Mat}\, T^{\dagger}$ on matriisi, joka saadaan $\mathrm{Mat}\, T$:sta transponoimalla matriisi ja kompleksikonjugoimalla sen alkiot.)

4. (jatkoa) Päteekö sama kääntäen? Päteekö vastaava $\mathbb{R}$-sisätuloavaruudessa?

5. Olkoon $\rho : G \to GL(V) : s \mapsto \rho_s$ äärellisulotteinen esitys. Osoita, että V voidaan varustaa sisätulolla, joka on invariantti ρ:n suhteen, ts.

$$(\rho_s x|\rho_s y) = (x|y) \quad \forall x, y \in V, s \in G.$$

(Vihje): Lauseke on monisteessa

6. Todista Serren kirjan lause 1 edellisen tehtävän tuloksen avulla: Oleta siis, että $\rho : G \to GL(V) : s \mapsto \rho_s$ on äärellisulotteinen esitys ja $W \subset V$ *invariantti eli stabiili* aliavaruus, ts $\rho_s W \subset W \ \forall s \in G$. Osoita, että myös $W^{\perp} = \{y \in V \mid y \perp x \, \forall x \in W\}$ on invariantti aliavaruus, kunhan sisätulo on invariantti.

KÄÄNNÄ

7. *Kahden vektoriavaruuden* V_1, V_2 *tensoritulo* määritellään usein (Määritelmä U) vektoriavaruudeksi W (jonka nimeksi tulee $W = V_1 \otimes V_2$) varustetuna bilineaarikuvauksella

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W : (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$$

jolla on seuraava *universaaliominaisuus* : Jokainen bilineaarikuvaus

$$B : V_1 \times V_2 \to U,$$

(Tässä siis U on mikä tahansa vektoriavaruus!) *faktorituu* $\otimes$*:n yli* ts jokaista bilineaarikuvausta $B : V_1 \times V_2 \to U$, kohti on olemassa tasan yksi lineaarikuvaus $L : W \to U$ siten, että

$$B = L \circ \otimes \quad : \quad V_1 \times V_2 \xrightarrow{\otimes} W(= V_1 \otimes V_2) \xrightarrow{L} U.$$

Sen sijaan Serren kirjassa kahden äärellisulotteisen vektoriavaruuden V_1, V_2 tensoritulo määritellään (Määritelmä S) vektoriavaruudeksi W varustetuna bilineaarikuvauksella

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W : (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$$

jolla on seuraava kantoihin liittyvä ominaisuus : Jos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ovat annettujen avaruuksien kannat, niin kaikki kantavektoriparien kuvat $e_i \otimes e_j$ muodostavat avaruuden W kannan.

Todista määritelmät U ja S yhtäpitäviksi, kun V_1 ja V_2 ovat äärellisulotteisia. Vihje: S $\Longrightarrow$ U on helppo. Toiseen suuntaan joutuu todistamaan kantaehdokkaiden lineaarisen riippumattomuuden (seuraa U:n olemassaolopuolesta) sekä sen, että ne virittävät W:n (Tässä tarvitaan yksikäsitteisyyttä).

(Serre merkitsee muuten vektorien tensorituloa vakiintuneen symbolin $v_1 \otimes v_2$ sijasta pisteellä, siis $v_1 \cdot v_2$.)

8. Todista tensoritulon $W = V_1 \otimes V_2$ olemassaolo, kun vektoriavaruudet V_1 ja V_2 ovat äärellisulotteisia.

9. Todista vektorien tensoritulon laskusäännöt: :

(R1) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w;$
(R2) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2;$
(R3) $c(v \otimes w) = cv \otimes w;$
(R4) $c(v \otimes w) = v \otimes cw.$

Vihje: helppo!.

10. 3. kierroksen tehtävä 8

11. 3. kierroksen tehtävä 9