JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**Lien ryhmät** **22.5.2012 D 380 klo. 10-12** **Ratkaisut 6+6=12**

**1.** *Käytä ehtoa* $\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G$ *kaikille* $t \in \mathbb{R}\}$ *ja tarvittaessa tietoa* $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$ *todistaksesi yhden tai useampia seuraavista.*

(1) $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + X^T = 0\}$

(2) $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + \overline{X}^T = 0\}$

(3) $\mathfrak{su}(n,\mathbb{C}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + \overline{X}^T = 0 \text{ ja } \operatorname{Tr} X = 0\}$

Ratkaisu:

Olkoon $X \in M^{n\times n}$.

(1) $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M^{n\times n} \mid AA^T = I\}$. Oletetaan ensin $X + X^T = 0$. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $\exp(tX) \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Koska oletettiin, että $X + X^T = 0$, niin $X = -X^T$, joten $X$ ja $X^T$ kommutoivat ja siis

$$\exp(tX)(\exp(tX))^T = \exp(tX)(\exp(tX^T)) = \exp(t(X + X^T)) = \exp 0 = I.$$

Oletetaan seuraavaksi, että että $\exp(tX) \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ pätee kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $X + X^T = 0$. Oletuksen mukaan kaikilla $t$ pätee $\exp(tX) \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ eli $\exp(tX)\exp(tX)^T = I$.

Campbellin ja Hausdorffin lauseen mukaan pätee, kun $\|X\|$ ja $\|Y\| < \frac{1}{2}\log(2-\frac{1}{2}\sqrt{2})$:

$$\log(\exp X \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \{\text{korkeammanasteisia Lien sulkeita}\}.$$

Pienillä $t$ pätee siis oletuksen mukaan

$$0 = \log I = \log(\exp(tX)\exp(tX^T)) = t(X + X^T) + t^2\frac{1}{2}[X,X^T] + t^3 P(X,X^T),$$

missä jäännöstermi $P$ on rajoitettu matriisifunktio.[1] Tästä seuraa, että $X + X^T = 0$.

(2) $\mathrm{U}(n) = \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = I\}$. Voidaan siis laskea kuten kohdassa (1), kunhan huomioidaan kompleksikojugointi tarvittaessa.

(3) $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = I \text{ ja } \det A = 1\}$. Kohdan (2) mukaan riittää siis tarkastaa, että $\det A = 1 \iff \operatorname{Tr} A = 0$, ja tämähän pätee, koska tehtävässä kerrottiin, että $\exp A = \exp(\operatorname{Tr} A)$. □

**2.** *Osoita, että*

$$\exp(\mathrm{ad}_X) = \mathrm{Ad}_{\exp X}$$

*Ohje: Sekä kuvaus* $\gamma_1(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}_X)$ *että kuvaus* $\gamma_2(t) = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$ *ovat lineaarisen Lien ryhmän* $G$ *yhden parametrin aliryhmiä samalla alkuarvolla* $\gamma_1'(0) = \gamma_1'(0) = \mathrm{ad}_X$, *joten ne ovat sama kuvaus. Tarkasta yksityiskohdat.*

Ratkaisu:

[1] Tarvitaanko selitys?

Yksiparametriset aliryhmät yhtyvät, kun niillä on sama derivaatta kohdassa $t = 0$, joten riittää tosiaan tarkastaa, että $\gamma_1$ ja $\gamma_2$ ovat yksiparametrisia aliryhmiä eli homomorfismeja $\mathbb{R} \to G$ ja laskea niiden derivaatat kohdassa $t = 0$.

a) Homomorfisuus: Tietenkin ad on lineaarikuvaus ja $t\,\mathrm{ad}_X$ ja $s\,\mathrm{ad}_X$ kommutoivat, joten

$$\begin{aligned}\gamma_1(t+s) &= \exp(\mathrm{ad}_{(t+s)X}) = \exp((t+s)\,\mathrm{ad}_X) = \exp(t\,\mathrm{ad}_X + s\,\mathrm{ad}_X)\\ &= \exp(t\,\mathrm{ad}_X)\exp(s\,\mathrm{ad}_X)) = \gamma_1(t)\gamma_1(s).\end{aligned}$$

Muistaen, että ryhmän adjungoitu esitys Ad on homomorfismi, saadaan

$$\begin{aligned}\gamma_2(t+s) &= \mathrm{Ad}_{\exp((t+s)X)} = \mathrm{Ad}_{\exp(tX+sX)} = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)\exp(sX)}\\ &= \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\mathrm{Ad}_{\exp(sX)} = \gamma_2(t)\gamma_2(s).\end{aligned}$$

b) Derivaattojen alkuarvot: $\gamma_1$ on helppo derivoida:

$$\frac{d}{dt}\gamma_1(t) = \frac{d}{dt}\exp(t\,\mathrm{ad}_X) = \mathrm{ad}\,{-X}\exp(t\,\mathrm{ad}_X) = \mathrm{ad}_X\,\gamma_1(t),\ \text{joten } \gamma_1'(0) = \gamma_1'(0) = \mathrm{ad}_X\,.$$

Kuvaus $\gamma_1$ vaatii hieman harkintaa, onhan $\mathrm{Ad}_A\,Y = AYA^{-1}$ ja derivointi $A$:n suhteen vaatii siis matriisitulon derivointikaavaa. Käänteisen derivointia ei tässä tarvita, koska tässä onneksi $A$:n roolissa on $\exp(tX)$, on $A^{-1} = \exp(-tX)$. Käytämme rreaalimuuttujan derivaatan määritelmää ja pidämme selvyyden vuoksi muuttujan $Y$ mukana:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma_2(t)Y\,\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\,Y\,\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)\,\Big|_{t=0}\\ &= X\exp(tX)Y\exp(-tX) + \exp(tX)Y(-X)\exp(-tX)\,\Big|_{t=0}\\ &= [X,Y] = \mathrm{ad}_X\,Y. \quad \square\end{aligned}$$

**3.** *Täydennä merkityt yksityiskohdat:*

Ratkaisu:

Lien sulkeiden säilymisen toteamiseksi vektorikentät $\xi \in \Xi G$ kannattaa tulkita derivaatioiksi, onhan derivaatioiden $\widetilde{\xi}$ ja $\widetilde{\eta}$ Lien sulje yksinkertaisesti $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = \widetilde{\xi}\circ\widetilde{\eta} - \widetilde{\eta}\circ\widetilde{\xi}$. Merkitsemme vektorikenttää $\xi$ vastaavaa derivaatiota tässä selvyyden vuoksi $\widetilde{\xi} \in \Xi G$. Muistin virkistykseksi:

$$\widetilde{\xi} : \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty G : \quad (\widetilde{\xi} f)(g) = (Df)_g \xi_g.$$

Erityisesti vektorikenttää $\xi_X$ vastaa derivaatio

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g(\xi_X)_g = (Df)_g(gX).$$

Erityisesti, jos $X \in T_eG$ tulkitaan 1. tehtävän määritelmän mielessä, siis matriisina, jolla jokainen $\exp(tX) \in G$), niin

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g(gX) = \frac{d}{dt}\,\Big|_{t=0} f(g\exp(tX)),$$

sillä **(a) ketjusäännön mukaan derivoiden**

$$\frac{d}{dt}\,\Big|_{t=0} f(g\exp(tX)) = (DF)\,\Big|_{ge^{tX}}\,(gXe^{tX})\,\Big|_{t=0} = (Df)_g(gX).$$

**(b) Tästä saadaan sulkeiden säilymiskaava**. Tarvitaan tosin lemma (c):

$$\begin{aligned}(\widetilde{\xi}_X(\widetilde{\xi}_Y f))(g) &\overset{(a)}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g\exp(sX)\exp(tY))\\ &= (D^2f)_g(gX,gY)+(Df)_g(gXY).\end{aligned}$$

Osoitetaan ensin, että **(c) riittää**: Väite on

$$([\widetilde{\xi}_X,\widetilde{\xi}_Y]f)(g) = (\widetilde{\xi}_{[X,Y]}f)(g).$$

Määritelmän ja lemman (c) mukaan

$$\begin{aligned}([\widetilde{\xi}_X,\widetilde{\xi}_Y])(g) &= (\widetilde{\xi}_X(\widetilde{\xi}_Y f))(g) - (\widetilde{\xi}_Y(\widetilde{\xi}_X f))(g)\\ &= ((D^2f)_g(gX,gY)+(Df)_g(gXY)) - ((D^2f)_g(gY,gX)+(Df)_g(gYX))\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(\widetilde{\xi}_{[X,Y]}f)(g) &= (Df)_g(g[X,Y])\\ &= (Df)_g(gXY-gYX)\\ &= (Df)_g(gXY)-(Df)_g(gYX),\end{aligned}$$

joten riittää huomata, että

$$(D^2f)_g(gX,gY) = ((D^2f)_g(gY,gX),$$

mikä $\mathcal{C}^\infty$-funktiolle $f$ päteekin.

Osoitetaan lopuksi, että lauseke **(c) on oikein** eli että

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g\exp(sX)\exp(tY)) = (D^2f)_g(gX,gY)+(Df)_g(gXY).$$

Tämä on suora lasku[2]. □

**4.** *Olkoon $\omega$ d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän vaseninvariantti d-muoto ja*

$$x\mapsto\varphi(x)=x^{-1},$$

*käänteisen muodostamiskuvaus $\varphi: G\to G$. Osoita, että*

$$\varphi^*\omega = \det(-\operatorname{Ad}_g)\omega.$$

*Ohje: a) Muista (tai osoita) että $(D\varphi)_e A = -A$. b) Osoita sitten, että kaikilla $g\in G$ on $(D\varphi)_g(gX) = g^{-1}(\operatorname{Ad}_g X)$. c) Loput.*

Ratkaisu:

a) Osoittaminen sujuu soveltamalla tulon derivoimiskaavaa tuloon $XX^{-1}=e$ kohdassa $e$:

$$0 = D(XX^{-1})_eA = D(X\,\varphi X)_eA = A\varphi(e)+e(D\varphi)_eA = A+(D\varphi)_eA.$$

b) Kuvaus $\varphi: G\to G$ on yhdistetty kuvaus

$$\begin{array}{rccccccc} & G & \overset{L_{g^{-1}}}{\to} & G & \overset{\varphi}{\to} & G & \overset{R_{g^{-1}}}{\to} & G\\ & x & \mapsto & g^{-1}x & \mapsto & x^{-1}g & \mapsto & x^{-1}\\ \text{erityisesti:} & g & \mapsto & e & \mapsto & e & \mapsto & g^{-1}.\end{array}$$

[2]mutta vaatii työtä ja rauhaa.

Lineaarikuvausten derivaatat ovat ne itse, ja kääntämisen derivaatta neutraalialkion kohdalla tunnetaan, joten derivoimalla saadaan lausuttua $(D\varphi)_g$:

$$\begin{array}{lccccccc} & T_gG & \overset{(DL_{g^{-1}})_g}{\to} & T_eG & \overset{(D\varphi)_e}{\to} & T_eG & \overset{(DR_{g^{-1}})_e}{\to} & T_{g^{-1}}G \\ & X & \mapsto & g^{-1}X & \mapsto & -g^{-1}X & \mapsto & -g^{-1}Xg^{-1} \\ \text{siis:} & gX & \mapsto & g^{-1}gX & \mapsto & -g^{-1}gX & \mapsto & -g^{-1}gXg^{-1} = -g^{-1}\operatorname{Ad}_g X. \end{array}$$

c) $\omega$ on $d$-ulotteisen Lien ryhmän vaseninvariantti $d$-muoto, joten[3]

$$\begin{aligned} (\varphi^*\omega)_x(xX_1, \ldots, xX_d) &= \omega_{\varphi(x)}((D\varphi)_x(xX_1), \ldots, (D\varphi)_x(xX_d)) \\ &= \omega_{x^{-1}}(-x^{-1}\operatorname{Ad}_x X_1, \ldots, -x^{-1}\operatorname{Ad}_x X_d) \\ &= \omega_e(-\operatorname{Ad}_x X_1, \ldots, -\operatorname{Ad}_x X_d) \\ &= \det(-\operatorname{Ad}_x)\omega_e(X_1, \ldots, X_d) \\ &= \det(-\operatorname{Ad}_x)\omega_x(xX_1, \ldots, xX_d) \end{aligned}$$

Siis $\varphi^*\omega = \det(-\operatorname{Ad}_g)\omega$. □

**Huomautus:** $d$-ulotteisella ryhmällä $G$ vaseninvariantti $d$-muoto $\omega$ määrää vaseninvariantin eli Haarin itan $\mu$. Äsken todistettu merkitsee, että kaikilla $g \in G$ ja kompaktikantajaisilla jatkuvilla funktioilla $f$ on

$$\int_G f(x^{-1})\, d\mu(x) = \int_G f(x)|\det(\operatorname{Ad}_{g^{-1}})|\, d\mu(x),$$

Tämän avulla voidaan uudelleen todistaa lause 3.24 eli väite $\Delta(g) = |\det(\operatorname{Ad}_{g^{-1}})|$ , sillä demojen (10) seurauksen mukaan kaikilla $g \in G$ ja kompaktikantajaisilla jatkuvilla funktioilla $f$ on

$$\int_G f(x^{-1})\, d\mu(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\mu(x),$$

missä $\mu$ on Haarin mitta.

**5.** *Osoita, että jos Lien ryhmän $G$ esitys $\eta$ on unitaarinen ja $W \subset$ on invariantti aliavaruus, niin $W$:n ortogonaalinen komplementti $W^\perp = \{v \in V \mid (v,u) = 0$ kaikilla $u \in W\}$ on myös invariantti.*

Ratkaisu:

$u \in W^* \perp \iff (u|w) = 0$ kaikilla $w \in W$. Olkoon $u \in W^* \perp$ ja $g \in G$. Osoitetaan, että $\eta_g u \in W^* \perp$. Olkoon $w \in W$. Unitaarisuusehdon nojalla

$$(\eta_g u|w) = (u|\eta_g{}^* w) = (u|\eta_{g^{-1}} w) = 0,$$

koska $W$:n invrianssin mukaan $\eta_{g^{-1}} w \in W$.

**6.** *Olkoon $G$ kompakti Lien ryhmä ja $\eta$ sen äärellisulotteinen esitys. Silloin on olemassa "korjattu" sisätulo avaruudessa $V$ siten, että $\eta$ on sen suhteen unitaarinen. Ohje: Osoita, että $(u|v)_\eta = \int_G (\eta_g u|\eta_g v)\, d\mu(g)$ kelpaa. Huomaa, että kun $g \in G$, niin $\{gh \mid h \in G\} = G$.*

Ratkaisu:

[3] Vrt. todistus lauseelle (3.24?) $\Delta(g) = |\det \operatorname{Ad}_{g^{-1}}|$, jossa on eri $\varphi$-kuvaus.

$(u|v)_\eta = \int_G (\eta_g u|\eta_g v)\, d\mu(g)$ on äärellinen, sillä $G$ on kompakti ja kuvaus $g \mapsto (\eta_g u|\eta_g v)$ on jatkuva. Selvästi siis $(u|v)_\eta$ on sisätulo avaruudessa $V$. Osoitetan esityksen $\eta$ unitaarisuus tämän sisätulon $(u|v)_\eta$ suhteen. Väite sanoo, että kaikille $h \in G$ on voimassa

$$(\eta_h u|\eta_h v)_\eta = (u|v)_\eta.$$

Lasketaan huomaten, että ryhmä on kompakti, siis unimodulaarinen, joten $\mu$ on myös oikeainvariantti. :

$$(\eta_h u|\eta_h v)_\eta = \int_G (\eta_g \eta_h u|\eta_g \eta_h v)\, d\mu(g) \overset{\mu \text{ oik inv}}{=} \int_G (\eta_{gh} u|\eta_{gh} v)\, d\mu(gh) = (u|v)_\eta. \quad \square$$