JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**Matemaatiikan historia** **Harjoitus 8 / 2011**

**Esseet**

Esseen voi tehdä itse valitsemastaan aiheesta. Ideana on ottaa tuntumaa historiantutkimukseen kaivelemalla jostain alkuperäislähdettä muistuttava dokumentti - Mattilanniemen kirjastossa on muitakin hyllyjä kuin sarja A. Onnekas löytää jutun, joka on internetissä väärin. Kurssin voi suorittaa pelkällä tentilläkin, mutta siitä on syytä ilmoittaa etukäteen.

## Lukuteoria ja käyrät

**1.** Muistetaan, että *Pythagoraan kolmikko* on $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ siten, että $a^2 + b^2 = c^2$. Todista, että

a) kompleksiluvun $z = x + iy$ reaali- ja imaginaariosa ovat molemmat rationaalisia aina ja vain, kun on olemassa luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $nz$ on *Gaussin kokonaisluku* eli sen reaali- ja imaginaariosa ovat kokonaislukuja.

b) kompleksitason yksikköympyrän (kehän) $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\}$ pisteen $z = x + iy$ reaali-ja imaginaariosa ovat rationaalilukuja tasan silloin, kun on olemassa luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $(nx, ny, n)$ on *Pythagoraan kolmikko*,

**2.** Arvioi (tai jopa laske!) kuinka monta Gaussin kokonaislukua on kompleksitasossa origokeskisen 2011-säteisen ympyrän sisällä. Entä kehällä?

**3.** Gaussin kokonaislukujen summa, erotus ja ja tulo ovat Gaussin kokonaislukuja, (ts. Gaussin kokonaisluvut muodostavat alirenkaan $\subset \mathbb{C}$, erityisesti renkaan.) Miten määrittelisit Gaussin alkuluvun käsitteen? Miksi jokaisen Gaussin kokonaisluvun voi lausua tulona Gaussin alkuluvuista? Missä määrin jako vaikuttaa yksikäsitteiseltä? Mitä tässä vielä olisi syytä kysyä ensin — tai ehkä jälkeenpäin?

**4.** Diofantos tiesi, että yhtälöllä $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$ on rationaalilukuratkaisu $x = \frac{21}{4}$, $y = \frac{71}{8}$. Todennäköisesti hän keksi sen konstruoimalla käyrälle tangentin ilmeiseen rationaalipisteeseen ja katsomalla, missä se leikkaa käyrän. Tee perässä!

**5.** Onko yhtälöllä $x^3 + y^3 = 1$ rationaalilukuratkaisu? Entä yhtälöllä $x^4 + y^4 = 1$? Keiden matemaatikoiden nimiin liittyvät vastaukset näihin kysymyksiin?

**6.** Lausu ellipsin kaaren pituus elliptisenä integraalina.

## Euler, Gauss, Riemann

**7.** *Eulerin $\zeta$-funktio* on

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Tiedät, että sarja hajaantuu, kun $s \leq 1$. Osoita, että

$$\zeta(2) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{11}\right)^2} \cdot \ldots$$

eli

$$\zeta(2) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - (\frac{1}{p})^2}\,,$$

missä tulo on otettu yli kaikkien alkulukujen joukon $\mathbb{P}$.
**Vihje**: Geometrisena sarjana

$$\frac{1}{1-(\frac{1}{p})^2} = 1 + \frac{1}{p^2} + (\frac{1}{p^2})^2 + (\frac{1}{p^2})^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{2\cdot 2}} + \frac{1}{p^{2\cdot 3}} + \ldots$$

Käsittele Eulerin tyyliin — kuin polynomia!

**8.** Suomelan tehtävä 1 sivulta 81ja 90 :
Gaussin "Disquisitiones Artihmeticae" (1801) on yksi matemaatisen kirjallisuuden idearikkaimpia teoksia, lukuteorian klassikko. Pienenä sivujuonena Gauss esittää siinä lauseen, jonka mukaan säännöllinen $n$-kulmio voidaan konstruida harpilla ja viivaimella, mikäli $n = 2^m p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$, missä $n$:n parittomat alkutekijät $p_j$ ovat **eri** *Fermat'n alkulukuja*, siis sekä jaottomia että *Fermat'n lukuja*. Ensimmäiset Fermat'n luvut ovat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. ( eli $\in \{3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, \ldots\}$, näistä 5 ensimmäistä ovat alkulukuja — muita Fermat'n alkulukuja ei tunneta. Vuonna 1837 Laurent Wantzel todisti, että Gaussin ehto on myös välttämätön. Todista Wantzelin lauseen seurauksena, että on olemassa kulma, jonka jakaminen kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivoittimella on mahdotonta.

**9.** Vertaa lukua $n$ pienempien alkulukujen lukumäärää lukuun $\frac{n}{\log n}$, kun $n = 100$ ja suuremmillakin $n$, jos jaksat tai käytössäsi on tarvittavaa tekniikkaa. (Riemann!)

**10. Bonus.** Leivo pullataikinasta torus ja vähintään sen 4 ensimmäistä yleistystä ja paista. Tarjoa demoissa kavereillesi tätä pullaa ja selitä ja laske mikä on kunkin pinnan genus. Voit koristella pullat esim geodeettisin käyrin tai perysryhmän alkioin.