Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 4**

Lauri Kahanpää

1. Euklidista normia merkitään $|\cdot|$. Kierroksella 2 laskettiin olennaisesti näin:

$$\|\Phi(x)\| = \|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| \leq L \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq nL \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq nL|x|,$$

missä $L = \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$ ja $M = nL$. **Käyttämällä Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöä voimme kuitenkin saada hieman tarkemman arvion ja valita** $M = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2}$.

Lineaarikuvauksen Φ (peräti Lip-) jatkuvuus seuraa tavalliseen tapaan: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon/M$. (Käsittele erikseen tapaus $M = 0$, jolloin $\Phi = 0$.) Kun $|x - y| \leq \delta$, niin $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|\Phi(x - y)\| \leq M|x - y| \leq M\delta = \varepsilon$.

2. (jatkoa) Tämäkin on olennaisesti kopio kierrokselta 2. Tässä $e_1, \dots, e_n \in E$ ovat lin. riippumattomat ja $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Koska $e_1, \dots, e_n$ ovat lin. riippumattomat, Φ on injektio, siis bijektio kuvajoukolleen E. (Injektiivisyys seuraa lin. algebrasta: Φ:n ydinhän on pelkkä $\{0\}$.) Siis Φ:llä on (lin) käänteiskuvaus $\Phi^{-1} : E \to \mathbb{R}^n$. Todistetaan sillekin (Lipschitz-) jatkuvuus johtamalla vastaava epäyhtälö kuin tehtävässä 1:

Merkitään $\mu = \min_{|x|=1} \|\Phi(x)\|_\infty$. Tämä minimi on olemassa, sillä suljetun pallon pinta $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ on kompakti ja kuvaus $\|\Phi(\cdot)\|_\infty = \|\cdot\|_\infty \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Minimin arvo μ on nollasta eroava, siis positiivinen, koska ϕ on injektio ja normi häviää vain origossa. Yksikkövektoreille x (eli 1-pallon pinnan vektoreille) väite siis pätee vakiolla $M = \frac{1}{\mu}$, onhan

$$|x| = 1 = 1 = \frac{1}{\mu} \min_{|x|=1} \|\Phi(x)\|_\infty \leq \frac{1}{\mu} \|\Phi(x)\|_\infty.$$

Muille vektoreille tulos saadaan periaatteessa huomaamalla, että tämä epäyhtälö säilyy, kun x kerrotaan luvulla. Käytännössä lasketaan vaikka näin: olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin vektorin $\frac{x}{|x|}$ normi on 1 (Tapaus $x = 0$ pitää tietysti käsitellä erikseen), ja siis $1 = |\frac{x}{|x|}| \leq M\|\Phi(\frac{x}{|x|})\|_\infty = \frac{1}{|x|} M\|\Phi(x)\|_\infty$, mikä onkin juuri väite. Jatkuvuus (jopa Lip) saadaan kuten tehtävässä 1.

3. (jatkoa) Olkoon $e_1, \dots, e_n$ E:n kanta. Merkitään $E_a = (E, \|\cdot\|_a)$ ja $E_b = (E, \|\cdot\|_b)$ sekä $\Phi_a : \mathbb{R}^n \to E_a : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ ja $\Phi_a : \mathbb{R}^n \to E_b : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, jolloin $\Phi_b \circ \Phi_a^{-1} : E_a \to E_b$ on (identtinen) kuvaus $E_a \to E_b : x \mapsto x$, joka pitää näyttää homeomorfismiksi (vaikka lähtö- ja maaliavaruuksissa on eri normit). Kahden jatkuvan (jopa Lip) kuvauksen yhdistettynä kuvauksena $\Phi_b^\circ \Phi_a^{-1} : E_a \to E_b$ on tietenkin (Lip-) jatkuva. Sen käänteiskuvaus on $\Phi_a \circ \Phi_b^{-1} : E_b \to E_a$ on vastaavasta syystä sekin (Lip) jatkuva. $\square$

Tehtävänannon vihjettä noudattamalla saa Lip-vakioille eli epäyhtälöiden kertoimille arvionkin. Varustetaan tehtävien 1 ja 2 vakiot alaindeksein a ja b sen mukaan kumpaan normiin ne liittyvät. Olkoon $u \in E$. Merk $x = \Phi_a^{-1}(u)$ $\big(= \Phi_b^{-1}(u).\big)$

$$\|u\|_a = \|\Phi_a x\|_a \leq M_a|x| = \frac{M_a}{m_b} m_b|x| \leq \frac{M_a}{m_b} \|\Phi_b(x)\|_b = \frac{M_a}{m_b} \|u\|_b. \qquad \square$$

4. Normeiksi toteaminen on aivan helppo tarkastus. Epäyhtälöt:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \le \sqrt{\max\{|x_1|^2,\dots,|x_n|^2\}} \le \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}\\ &= \|x\|_2 \overset{\text{lisää pos. termejä}}{\le} \sqrt{(|x_1|+\cdots+|x_n|)(|x_1|+\cdots+|x_n|)} = \|x\|_1\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= (|x_1|+\cdots+|x_n|) = (1\cdot|x_1|+\cdots+1\cdot|x_n|) \overset{CS}{\le} \|(1,\cdots,1)\|_2\cdot\|x\|_2\\ &= \sqrt{n}\|x\|_2 = \sqrt{n}\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} \le \sqrt{n}\sqrt{n\max\{|x_1|^2,\dots,|x_n|^2\}} = n\|x||_\infty\end{aligned}$$

"Parhaaat mahdolliset" tarkoittaa, että ei ole ole olemassa pienempiä (tai tilanteen mukaan suurempia) vakioita, jotka toteuttaisivat em. epäyhtälöt **kaikille** $x\in\mathbb{R}^n$. Osoitetaan tämä näyttämällä, että jokaisessa em neljästä epäyhtälöistä voi (kaikissa dimensioissa n) esiintyä "=".

Tietysti $\|x\|_\infty = \|x\|_2 = \|x\|_1$ $(=1)$, kun valitaan $x=(1,0,\dots,0)$.

Toisaalta $\|x\|_1 = \sqrt{n}\|x\|_2 = n\|x\|_\infty$ $(=n)$, kun valitaan $x=(1,1,\dots,1)$.

6. (NÄIN PÄIN !)

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_0^1 |f|\,dt = \int_0^1 1\cdot|f|\,dt \overset{CS}{\le} \|1\|_2\cdot\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 1^2\,dt}\cdot\|f\|_2 = \|f\|_2\\ &= \sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt} \le \sqrt{\int_0^1 \|f\|_\infty^2\,dt} = \|f\|_\infty\end{aligned}$$

7. Esimerkeiksi kelpaavat viime kerran funktiot, mutta vähemmällä pääsee laskemalla ohjeen mukaan eli valitsemalla $f_r(x)=x^r$ välillä $[0,1]$. (Tässä $r>0$, siis esim. $r\in\mathbb{N}$.)

$$\begin{aligned}\|f_r\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]}|x^r| = 1\\ \|f_r\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 |x^r|^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 x^{2r}\,dx} = \sqrt{\tfrac{1}{2r+1}}\\ \|f_r\|_1 &= \int_0^1 |x^r|\,dx = \tfrac{1}{r+1}.\end{aligned}$$

Ei (selvästikään) ole vakiota M, jolle olisi $\|f_r\|_2 \le M\|f_r\|_1$ eli $\sqrt{\frac{1}{2r+1}} \le \frac{M}{r+1}$ kaikilla $r\in\mathbb{N}$.

Ei ole vakiota M, jolle olisi $\|f_r\|_\infty \le M\|f_r\|_2$ eli $1\le M\sqrt{\frac{1}{2r+1}}$ kaikilla $r\in\mathbb{N}$.

Ei (siis) ole vakiota M, jolle olisi $\|f_r\|_\infty \le M\|f_r\|_1$ eli $1\le\frac{M}{r+1}$ kaikilla $r\in\mathbb{N}$.

Identtinen kuvaus $(\mathcal{C}_\mathbb{R}(0,1);\|\cdot\|_j)\to(\mathcal{C}_\mathbb{R}(0,1);\|\cdot\|_k)$ on siis jatkuva, kun $j\le k$ (tehtävä 6), mutta epäjatkuva, kun $j>k$. (Tämä teht. ja tieto, että lineaarikuvauksen jatkuvuus 0:ssa antaa kielletynlaisen vakion M olemassaolon.)