Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 6
22.02.06

1. Jos funktio p on korkeintaan astetta n oleva *trigonometrinen polynomi*,

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad ,$$

niin näytä, että kertoimet a_k, b_k ovat yksikäsitteisesti määrätyt. Mitä voit sanoa kertoimista a_k, b_k kun trigonometrinen polynomi p on parillinen tai vastaavasti pariton funktio? (Laske integraalit $\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\, \cos(mt)\, dt$, $\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\, \sin(mt)\, dt$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.)

2. Totea vastaavasti, että (korkeintaan) *n-asteisen Fourier-polynomin*

$$q(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

kertoimet $c_k \in \mathbb{C}$ ovat yksikäsitteisiä ja näytä, että q on reaaliarvoinen funktio **joss** $c_{-n} = \bar{c}_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. (Määrää integraalit $\int_{-\pi}^{\pi} q(t)\, e^{-imt}\, dt$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Funktio q on reaaliarvoinen, jos $\overline{q(t)} = q(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.)

3. Määrää Eulerin kaavan $e^{ikt} = \cos(kt) + i\, \sin(kt)$, $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ avulla tehtävän 1 trigonometrisen polynomin p esitys Fourier-polynomina.

4. Näytä edelleen Eulerin kaavojen avulla, että jokainen m-asteinen polynomi

$$f(t) = P(\cos(t), \sin(t)) = \sum_{j+k \le m} a_{jk} \cos^j(t)\, \sin^k(t)$$

funktioista $\cos(t)$ ja $\sin(t)$ on astetta $n \le m$ oleva Fourier-polynomi. Voiko n olla aidosti astelukua m pienempi?

5. Merkitään $C(2\pi) = C(\mathbb{R}; 2\pi)$ kaikkien 2π-jaksollisten jatkuvien funktioiden avaruutta. Näytä, että *funktion f n. asteen Fourier-polynomi*

$$s_n(t) = s_n^f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} \in \mathcal{F}_n, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \ ,$$

approksimoi funktiota $f \in C(2\pi)$ L^2-normin

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

suhteen parhaiten kaikkien *n-asteisten Fourier-polynomien avaruudessa* $\mathcal{F}_n = \left\{ q = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{C} \right\} \subset C(2\pi)$. (Erotus $f - q$, $q \in \mathcal{F}_n$, voidaan esittää summana $f - q = (f - s_n) + (s_n - q)$, jolloin myös $s_n - q \in \mathcal{F}_n$. Lausu erotuksen $f - q$ normin neliö funktioiden $f - s_n$ ja $s_n - q$ normien avulla.)