



1. Osoita, että jos luvulla  $\alpha \in \mathbb{C}$  on  $\mathbb{Q}$ :ssa minimaalipolynomi  $x^2 - 2$  ja  $\beta$ :lla  $\mathbb{Q}$ :ssa minimaalipolynomi  $x^2 - 4x + 2$ , niin laajennukset  $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$  ja  $\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}$  ovat isomorfiset, ts. on olemassa kuntasomorfismi  $\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\beta)$ , jonka rajoittuma kuntaan  $\mathbb{Q}$  on identtinen kuvaus. Onko  $\iota$  kuntalaajennuksen automorfismi? (Tarkasta sanan merkitys kierroksen 3 tehtävästä 8)

2. Määrää seuraavien kuntalaajennusten aste:

- (1)  $\mathbb{R}(\sqrt{5}) : \mathbb{R}$
- (2)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{11}) : \mathbb{Q}$
- (3)  $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}$
- (4)  $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ , missä  $\alpha^7 = 3$ .

3. Osoita, että kunnan  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$  jokainen alkio on yksikäsitteisesti esitettävissä muodossa  $a + b\sqrt{5} + c\sqrt{7} + d\sqrt{35}$ . Lausu tällaisen alkion käänteisalkio tässä muodossa.

4. Olkoon  $\mathbb{A}$  algebrallisten lukujen kunta. Osoita, että  $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}] = \infty$ . Vihje: näytä Eisensteinin ehdon avulla, että on olemassa mielivaltaisen korkean asteen jaottomia  $\mathbb{Q}$ -polynomeja.

5. \*? Oleta tunnetuksi algebran peruslause, jonka mukaan jokaisella  $\mathbb{C}$ -polynomilla on  $\mathbb{C}$ :ssä nollakohta. Osoita, että jokaisella  $\mathbb{A}$ -polynomilla on  $\mathbb{A}$ :ssa nollakohta ja että siis  $\mathbb{A}$ :lla ei ole aitoja (siis muita kuin se itse) algebrallisia laajennuksia.

6. Minkäasteinen kuntalaajennus  $\mathbb{K} : \mathbb{Q}$  riittää kuhunkin seuraavista harppi-viivainkonstruktioista? (kilpailu: kuka löytää pienimmän asteen kussakin kohdassa.)

- (1) Janan keskinormaalien konstruktio
- (2) Janan jako kolmeen yhtä suureen osaan
- (3) Annetun ympyrän tangentin piirtäminen annettuun pisteeseen.
- (4\*) Kahden ympyrän yhteisten tangenttien konstruktio

7. Osoita, että harpilla ja viivaimella ei voi konstruoida säännöllistä 9-kulmiota.

8. Totta vai tarua:

- (1) Samanasteiset kuntalaajennukset ovat aina isomorfiset.
- (2) Isomorfiset kuntalaajennukset ovat aina samanasteiset.
- (3) Jokainen algebrallinen kuntalaajennus on äärellinen.
- (4) Jokainen äärellinen kuntalaajennus on algebrallinen.
- (5) Jokainen kompleksiluku on  $\mathbb{R}$ :n suhteen algebrallinen.
- (6) On olemassa kaikenasteisia kuntalaajennuksia.

9. \*. (lisäpisteetön) Voiko kulman  $2\pi/5$  jakaa kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivaimella?

KÄÄNNÄ

**10. \*** (lisäpisteetön) Millä seuraavista polynomeista  $m$  on olemassa algebrallinen yksinkertainen kuntalaaajennus  $\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}$ , jonka minimaalipolynomi on  $m$ ?

(1)  $m(x) = x^2 - 4$  kunnassa  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(2)  $m(x) = x^2 + 1$  kunnassa  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$

(3)  $m(x) = x^2 + 1$  kunnassa  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$

(4)  $m(x) = x^7 - 3x^6 + 4x^3 - x - 1$  kunnassa  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$