



1. Määrää kunnan kaikki alkiot. (Ne ovat tietenkin lukuja):
  - a)  $\mathbb{Q}(i\sqrt{11})$
  - b)  $\mathbb{Q}(e^2 + 1)$
  - c)  $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$
2. Osoita, että  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  ja  $\sqrt{6}$  ovat  $\mathbb{Q}$ -lineaarisesti riippumattomia.
3. Lausu  $s$ :n käänteinen lineaarikombinaationa samoista luvuista kuin annettu  $s$ 
  - a)  $s = a + b\sqrt{2}$  kunnassa  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
  - b)  $s = a + b\alpha + c\alpha^2\sqrt{3}$  kunnassa  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , missä  $\alpha = \sqrt[3]{3}$
4. Lausu  $s$ :n käänteinen lineaarikombinaationa samoista luvuista kuin annettu  $s$ 
  - a)  $s = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$  kunnassa  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
  - b)  $s = a + bi + c\sqrt{5} + di\sqrt{5}$  kunnassa  $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$
  - c)  $s = 3 + 6h$ , missä  $h$  on polynomin  $(x - 3)(x + 4)$  suurin reaalinen nollakohta.
5. Onko  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$  yksinkertainen kuntalaaajennus vai ei? Miksi? (Asia vaatii perustelun, onhan esimerkiksi  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$ , mikä ehkä kannattaa tarkastaa sekin.)
6. Etsi seuraavien alkioiden minimaalipolynomit ao. kuntalaaajennuksissa
  - a)  $i$  laajennuksessa  $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$  (Haetaan siis  $\mathbb{Q}$ -kertoimista jaotonta perusmuotoista polynomia.)
  - b)  $i$  laajennuksessa  $\mathbb{C} : \mathbb{R}$
  - c)  $\sqrt{2}$  laajennuksessa  $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$
  - d)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  laajennuksessa  $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$
  - e)  $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$  laajennuksessa  $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$
7. Etsi identtisestä kuvauksesta eroava kunta-automorfismi tai todista ettei sellaista ole olemassa. (Isomorfismia ryhmältä, renkaalta tai kunnalta itselleen sanotaan yleensä *automorfismiksi*.)
  - a)  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
  - b)  $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
  - c)  $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
  - d)  $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - e)  $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
  - f)  $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$
8. Etsi identtisestä kuvauksesta eroava *kuntalaaajennuksen*  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  *automorfismi* eli kunta-automorfismi  $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ , jonka rajoittuma pienempään kuntaan  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  on identtinen kuvaus, tai todista ettei sellaista ole olemassa.

9. \*. Mitkä seuraavista ovat tosia ?

- a) Jokaisella aidolla  $\mathbb{C}$ :n alikunnalla on jokin kuntalaaajennus.
- b) Jokaisella aidolla  $\mathbb{C}$ :n alikunnalla on yksinkertainen kuntalaaajennus.
- c) Jokainen yksinkertainen kuntalaaajennus on joko algebrallinen tai transkendenttinen, mutta ei molempia.
- d) Kaikki saman alikunnan  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  yksinkertaiset kuntalaaajennukset ovat isomorfisia keskenään.
- e) Kaikki saman alikunnan  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  transkendenttiset kuntalaaajennukset ovat isomorfisia keskenään.
- f) Minimaalipolynomi on jaoton.
- g) Perusmuotoinen polynomi on jaoton.
- h) Jokainen polynomi on luvun ja jaottoman polynomin tulo.
- i) Jokainen polynomi on jaollinen jonkin luvun minimipolynomilla.