

Algebra 1A, Harjoitus 6
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 6.5. 2016

1. Olkoon $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \neq 0 \right\}$. Etsi matriisit $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ ja $B \in K$ siten, että $ABA^{-1} \notin K$. Päättele tästä, että K ei ole ryhmän $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä.
2. Olkoon $E(2)$ tason isometrioiden ryhmä, ja $T = \{\tau_a(x) = x + a : a \in \mathbb{R}^2\}$ siirtokuvausten muodostama aliryhmä. Osoita, että T on ryhmän $E(2)$ normaali aliryhmä (Monisteen Esimerkki 2.37).
3. Olkoon $H = \{f \in E(2) : f(0) = 0\}$. Onko H ryhmän $E(2)$ normaali aliryhmä?
4. Olkoon N ryhmän G aliryhmä, ja $[G : N] = 2$. Osoita, että N on ryhmän G normaali aliryhmä.
5. Säännöllisen kuusikulmion symmetriaryhmällä D_6 on yhteensä 14 aitoa aliryhmää. Merkitään identtistä kuvausta k_0 ja kiertoja k_1, \dots, k_5 kasvavan kiertoikulman mukaan. Osoita, että aliryhmät $\langle k_1 \rangle$, $\langle k_2 \rangle$ ja $\langle k_3 \rangle$ ovat kaikki ryhmän D_6 normaaleja aliryhmiä (vihje: Voit soveltaa edellistä tehtävää ryhmään $\langle k_1 \rangle$). Osoita, että $p\langle k_2 \rangle p \subset \langle k_2 \rangle$ kaikilla peilauksilla p , ja samoin k_3 :n tapauksessa).
6. Tehtävän 5 aliryhmien lisäksi ryhmällä D_6 on kaksi aliryhmää jotka ovat isomorfiset ryhmän D_3 kanssa, ja erityisesti normaaleja Tehtävän 4 nojalla. Muut aliryhmät ovat muotoa $\langle p \rangle$ tai $\langle k_3, p \rangle$, missä p on peilaus. Osoita, että nämä eivät ole normaaleja.
7. Anna homomorfismi $f : D_6 \rightarrow S_3$ jonka ydin on $\langle k_3 \rangle$ (vihje: väritä kuusikulmion sivut sopivasti).
8. Anna homomorfismi $f : D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ jonka ydin on $\langle k_2 \rangle$ (vihje: väritä kuusikulmion sivut ja kärkipisteet sopivasti).