

Algebra 1A, Harjoitus 5
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 29.4. 2016

1. Luettele ryhmän A_4 aliryhmän $N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ oikeat sivuluokat, ja anna indeksi $[A_4 : N]$.
2. Luettele ryhmän A_4 aliryhmän $K = \{(1), (123), (132)\}$ oikeat sivuluokat, ja anna indeksi $[A_4 : K]$.
3. Olkoon K ryhmän G aliryhmä, ja $a \in G$. Osoita, että $Ka = \{ka : k \in K\}$.
4. Olkoon G ryhmä jonka kertaluku on pienempi kuin 100. Oletetaan, että ryhmällä G on kertalukua 10 ja 25 olevat aliryhmät. Mikä on ryhmän G kertaluku (vihje: Lagrangen lause)?
5. Olkoon G ryhmä, $|G| = 4$. Osoita, että G on isomorfinen joko ryhmän \mathbb{Z}_4 tai ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ kanssa (vihje: $G \cong \mathbb{Z}_4$ jos ja vain jos G on syklinen. Jos G ei ole syklinen, saat sen laskutaulukon selvitettyä Lagrangen lauseen avulla).
6. Osoita, että tehtävän 1 aliryhmä N on ryhmän A_4 ainoa aito aliryhmä joka ei ole syklinen. Päättele tästä, että ryhmällä A_4 ei ole kertaluvun 6 aliryhmää (vihje: osoita ensin, että jos aliryhmään K kuuluu alkioden (1) , (123) ja (132) lisäksi jokin muukin alkio, niin $|K| \geq 7$).
7. *Kvaternioiden ryhmä* $Q = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ varustetaan kompleksiker-
toimisten matriisien kertolaskulla, missä

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j},$$

ja muodosta ryhmän Q laskutaulukko (riittää muodostaa alkioille $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

8. Olkoon G alkioden a ja b , $a \neq b$, virittämä ryhmä jolle pätee $|a| = 4$, $a^2 = b^2$, ja $ba = a^3b$. Osoita, että $|G| = 8$. Huomaa edelleen, että edellisen tehtävän ryhmä Q toteuttaa ryhmän G ehdot.