Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 9, 1.7. 2014

HUOM: HARJOITUKSET TIISTAINA 1.7. 10:15-12:00

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $t, s > 0$. Osoita, että

$$\mathcal{H}^s(tA) = t^s \mathcal{H}^s(A).$$

Tässä $tA = \{tx : x \in A\}$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $s, \delta > 0$. Osoita, että $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ jos ja vain jos $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

3. Tarkastellaan Hausdorffin $\frac{1}{2}$-sisältöä $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ joukossa $\mathbb{R}$.

(i) Osoita, että $\mathcal{H}^{1/2}_\infty = v(I)^{1/2}$ kaikilla rajoitetuilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.

(ii) Osoita, että väli $[0, 1]$ ei ole $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$-mitallinen.

(Vihje: $\sum a_j^{1/2} \geq (\sum a_j)^{1/2}$ kun $a_j \geq 0$.)

4. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, missä Γ koostuu äärellisen monesta joukosta. Osoita, että jos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on Γ-mitallinen, niin f saa vain äärellisen monta arvoa.

5. Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $\Gamma_0 \subset \Gamma$ σ-algebra, ja $f : X \to [0, \infty]$ Γ-mitallinen. Osoita, että

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \Gamma_0,$$

määrittelee mitan ν σ-algebraan Γ_0.

6. (jatkoa) Osoita, että

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu$$

kaikille Γ_0-mitallisille funktioille $g : X \to [0, \infty]$.

7. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(2 + \frac{n^2}{k}\Big)^{-n}.$$

8. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{1}{n+k} - 3\Big)^{-n}.$$

9. Konstruoi Cantor-tyyppinen joukko C (muuttamalla $\frac{1}{3}$-joukon konstruktiossa poistettavien välien pituuksia) siten, että $\dim_{\mathcal{H}}(C) = 0$.

10. Olkoon $C \subset [0, 1]$ Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Osoita, että $\mathcal{H}^s(C) > 0$ kun $s = \log 2/ \log 3$ (ohje: olkoon (A_k) avointen välien muodostama joukon C peite. Koska C on kompakti, voidaan olettaa että (A_k) on äärellinen. Valitse j siten, että jokaisen A_k pituus on selvästi suurempi kuin 3^{-j}, ja laske montako konstruktion j:nnen vaiheen väliä sisältyy kuhunkin joukkoon A_k).