Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 8, 26.6. 2014

1. Olkoon X joukko, ja μ^* lukumäärämitta joukossa X. Osoita, että jokainen $A \subset X$ on μ^*-mitallinen.

2. Olkoon X ylinumeroituva joukko ja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$,

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{kun } A \subset X \text{ on numeroituva} \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että μ^* on ulkomitta.

3. Olkoot X ja μ^* kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että joukko $A \subset X$ on μ^*-mitallinen jos ja vain jos A on numeroituva tai $X \setminus A$ on numeroituva.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ Lebesgue-integroituva, ja asetetaan ulkomitta

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \int_B f\,dx : B \in \mathcal{M}_n,\ E \subset B \Big\}.$$

Osoita, että Lebesgue-mitalliset joukot ovat μ^*-mitallisia.

5. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa $[0,1]$ siten, että $\mu^*([0,1]) = 1$ ja $\mu^*(A) \le m_1^*(A)$ jokaisella $A \subset [0,1]$. Osoita, että $\mu^* = m_1^*$.

6. Anna esimerkki ulkomitasta μ^* ja joukoista A_k siten, että $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ ja $\mu^*(A_1) < \infty$, mutta

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) > \mu^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \Big).$$

7. Olkoot $C > 0$ ja $\alpha > 1$. Olkoon μ^* ulkomitta välillä $[0,1]$ siten, että

$$\mu^*([a,b]) \le C(b-a)^\alpha$$

kaikilla $a < b$. Osoita, että $\mu^*([0,1]) = 0$.

8. Olkoon μ^* äärellinen Borel-mitta välillä $(0,1]$. Osoita, että funktio

$$f : (0,1] \to [0,1],\ f(t) = \mu^*((0,t]),$$

on jatkuva jos ja vain jos $\mu^*(\{x\}) = 0$ jokaisella $x \in (0,1]$.

9. Anna esimerkki Borel-mitasta μ^* välillä $[0,1]$ ja suljetusta joukosta $E \subset [0,1]$, $m_1(E) = 0$, siten, että $\mu^*(E) = 1$ ja $\mu^*(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$ (vihje: Cantorin funktio).

10. Olkoon $A \subset [0,1]$ siten, että $m_1^*(A \cap I) \le m_1(I)/2$ jokaisella välillä $I \subset [0,1]$. Osoita, että $m_1^*(A) = 0$.