Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 7, 24.6. 2014

1. Olkoon $f(x) = |x|^\alpha$ ja $1 \leq p < \infty$. Osoita, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$ jos ja vain jos $\alpha < -n/p$.

2. Todista Youngin epäyhtälö: jos $a, b \geq 0$ ja $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, niin

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ohje: Integroi funktiota $\varphi(t) = t^{p-1}$ välin $[0,a]$ yli. Integroi sitten käänteisfunktiota φ^{-1} välin $[0,b]$ yli. Nyt ensimmäinen integraali antaa funktion φ graafin alapuolelle jäävän joukon pinta-alan, ja toinen integraali graafin vasemmalle puolelle jäävän joukon pinta-alan. Laske alat yhteen ja vertaa suorakulmion $[0,a] \times [0,b]$ pinta-alaan. Milloin pätee yhtäsuuruus?

3. Jos $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ja $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$, niin summafunktio $f + g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ei ole hyvin määritelty jos esim. $f(x) - g(x) = \infty - \infty$ jollain x. Osoita, että $[f+g] = [f] + [g] \in L^p(A)$ voidaan kuitenkin aina määritellä.

4. Olkoon $1 \leq p \leq q < \infty$ ja $0 < m_n(A) < \infty$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^p \, dm_n \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^q \, dm_n \right)^{1/q}$$

kaikilla $f \in L^q(A)$.

5. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Osoita, että

$$L^p(A) \cap L^\infty(A) \subset L^q(A).$$

6. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Konstruoi jono (f_j) avaruudessa $L^p([0,1])$ siten, että $||f_j||_p \to 0$, mutta jono $(f_j(x))_j$ ei suppene millään $x \in [0,1]$ kun $j \to \infty$.

7. Olkoon $1 \leq p < \infty$, ja olkoon (f_j), $f_j : [0,1] \to [0,1]$, jono avaruudessa $L^p([0,1])$ siten, että melkein kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $f_j(x) \to 0$ kun $j \to \infty$. Osoita, että $f_j \to 0$ avaruudessa $L^p([0,1])$.

8. Onko edellisen tehtävän väite totta jos $p = \infty$?

9. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, $m_n(A) = \infty$, ja $1 \leq p, q \leq \infty$, $p \neq q$. Osoita, että on olemassa $f \in L^p(A) \setminus L^q(A)$.

10. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituva. Osoita, että jokaisella $\epsilon > 0$ on jatkuva $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_\epsilon| \, dx < \epsilon$ (ohje: osoita väite ensin funktiolle χ_V kun V on avoin ja rajoitettu, seuraavaksi kun V on mitallinen, sitten yksinkertaiselle funktiolle).