Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 6, 17.6. 2014

Kurssin ensimmäisen osan viimeinen harjoitus

1. Olkoon $f : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2}, & y < x < 1, \\ -y^{-2}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että

$$\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} f(x,y)\, dy dx = 1 \quad \text{ja} \quad \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} f(x,y)\, dx dy = -1$$

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3$ ja

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}.$$

Laske $\int_A f\, dm_2$.

3. Onko funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/3}$ absoluuttisesti jatkuva?

4. Konstruoi Riemann-integroituva funktio $f : [0,1] \to [0,1]$ joka on epäjatkuva ylinumeroituvassa joukossa.

5. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva siten, että f' on rajoitettu. Osoita, että $f_{|[0,1]}$ on absoluuttisesti jatkuva. Päteekö väite jos f on derivoituva vain melkein kaikkialla?

6. Olkoot $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuvia funktioita. Osoita, että fg on absoluuttisesti jatkuva.

7. Konstruoi jatkuva funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $A \in \mathcal{M}_1$ siten, että $f^{-1}(A)$ ei ole mitallinen. (Ohje: Voit käyttää hyväksesi seuraavaa tietoa: jokainen positiivimittainen joukko $B \subset [0,1]$ sisältää ei-mitallisen joukon. Olkoon h Cantorin funktio. Tarkastele funktion $x \mapsto h(x) + x$ käänteisfunktiota).

8. Anna esimerkki mitallisesta funktiosta $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että f ei ole Lebesgue-integroituva, mutta epäoleellinen Riemannin integraali

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} f(t)\, dt = I \in \mathbb{R}$$

on olemassa.

9. Anna mitallinen funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että jos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ on funktio jolle $g(x) = f(x)$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$, niin g ei ole jatkuva missään $x \in [0,1]$ (vihje: Harjoitusten 4 tehtävä 10).

10. Olkoon $p \geq 1$, ja $u : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^p\, dx \Big)^{1/p} \leq \int_0^{\infty} m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq t\})^{1/p}\, dt.$$