Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 5, 12.6. 2014

1. Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Osoita, että $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$.

2. Anna esimerkki laskevasta jonosta (f_k), $f_k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, mitallisia funktioita siten, että

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx \neq \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dx.$$

3. Anna esimerkki jonosta (f_k), $f_k : [0, 1] \to [0, 1]$, mitallisia funktioita siten, että Fatoun lemmassa on aito epäyhtälö;

$$\int\limits_{[0,1]} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\, dx < \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_k(x)\, dx.$$

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-|x|/k}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

5. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{[1,2]} \log\Big(1 + \frac{1}{x^j}\Big) x\, dx.$$

6. Määrää ne luvut $a \in \mathbb{R}$ joille allaoleva raja-arvo on olemassa ja äärellinen:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^k \Big(1 - \frac{x}{k}\Big)^k e^{ax}\, dx.$$

7. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\infty[} \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$

8. Osoita allaolevan raja-arvon olemassaolo ja määritä se perustellen:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty n e^{-nx} \sin(1/x)\, dx.$$

9. Olkoot $f_k, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ siten, että $f_k(x) \to f(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx$ jos ja vain jos $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|\, dx \to 0$.

10. Olkoon $E \in \mathcal{M}_1$, $m_1(E) > 0$, ja olkoon (x_k) jono siten, että $x_k \in [0, 1]$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että on olemassa $y \in \mathbb{R}$ ja osajono (x_{k_j}) siten, että $y + x_{k_j} \in E$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.