Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 4, 10.6. 2014

1. Osoita, että yksinkertaiset funktiot ovat mitallisia.

2. Anna esimerkki mitallisesta funktiosta $f : [0,1] \to [0,\infty]$ siten, että $f(x) < \infty$ kaikilla $x \in [0,1]$, mutta $\int_{[0,1]} f\, dm_1 = \infty$.

3. Olkoon (x_k), $k = 1,2,\dots$ jono avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$. Osoita tarkasti, että $\lim_{k\to\infty} x_k$ on olemassa jos ja vain jos $\liminf_{k\to\infty} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k$.

4. Määritellään funktiot $f_j : [0,1] \to [0,1]$ seuraavasti: $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_3 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_4 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_5 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_6 = \chi_{[3/4,1]}$, $f_7 = \chi_{[0,1/8]}\dots$. Määritä funktiot $\limsup_{j\to\infty} f_j$ ja $\liminf_{j\to\infty} f_j$.

5. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $g \circ f$ on mitallinen.

6. Olkoot $f_j : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $j = 1,2,\dots$ mitallisia funktioita. Osoita, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j\, dx$$

(sovella monotonisen konvergenssin lausetta).

7. Anna jono (f_k), missä kukin $f_k : [0,1] \to [0,1]$ on mitallinen, siten että

$$\int\limits_{[0,1]} f_k\, dm_1 \to 0$$

kun $k \to \infty$, mutta $f_k(x)$ ei suppene millään $x \in [0,1]$.

8. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen ja joukot $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ pareittain pistevieraita ja Lebesgue-mitallisia. Osoita, että

$$\int\limits_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{E_j} f\, dx.$$

9. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ja $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia. Osoita, että

$$\int\limits_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f\, dx = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} f\, dx.$$

10. Anna mitallinen $E \subset [0,1]$ siten, että $m_1((a,b) \cap E) > 0$ ja $m_1((a,b) \setminus E) > 0$ kaikilla $0 \le a < b \le 1$.