Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 3, 5.6. 2014

1. Näytä, että funktio $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $f=10\chi_{[-2,5]}+5\chi_{]2,3[}+\chi_{\mathbb{Q}}$ on yksinkertainen. Anna funktion f normaaliesitys ja laske integraali $I(f,\mathbb{R})$.

2. Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$. Osoita, että A on mitallinen jos ja vain jos karakteristinen funktio χ_A on mitallinen.

3. Anna esimerkki funktiosta $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ joka ei ole mitallinen.

4. Keksi esimerkki mitallisista joukoista $\mathbb{R}^n\supset A_1\supset A_2\supset\ldots$, joille

$$m_n\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\Big)<\lim_{j\to\infty}m_n(A_j).$$

5. Osoita, ettei ole jatkuvaa funktiota $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ siten, että

$$f(x)=\chi_{[0,1]}(x)\quad\text{melkein kaikilla } x\in\mathbb{R}.$$

6. Joukkojen $A,B\subset\mathbb{R}^n$ *summajoukko* on

$$A+B=\{x+y:\ x\in A,\ y\in B\}.$$

Konstruoi joukot $A,B\subset\mathbb{R}^2$ siten, että $m_2^*(A)=m_2^*(B)=0$, mutta

$$m_2^*(A+B)>0.$$

7. Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu. Onko $m_n(\partial A)=0$?

8. Olkoon $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ kierto, eli lineaarikuvaus jonka matriisille pätee $LL^T=I$ ja $\det(L)=1$. Asetetaan $\mu(A)=m_n^*(L(A))$ kaikilla $A\subset\mathbb{R}^n$. Osoita, että $\mu(V)=m_n^*(V)$ jokaisella avoimella $V\subset\mathbb{R}^n$ (ohje: voit olettaa, että Harjoitusten 2 tehtävä 9 pätee kaikilla $n\geq 2$ kun joukot $[a,b)$ korvataan joukoilla $[a,b)^n$).

9. Osoita, että rationaalilukujen joukko voidaan esittää jonona $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ siten, että

$$\mathbb{R}\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big(q_j-\frac{1}{j},q_j+\frac{1}{j}\Big)\neq\emptyset.$$

10. Konstruoi joukot $A,B\subset\mathbb{R}$ siten, että $m_1^*(A)=m_1^*(B)=0$, mutta

$$m_1^*(A+B)>0.$$