Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 2, 3.6. 2014

1. Osoita, että $m_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

2. Anna avoin joukko $A \subset \mathbb{R}$ siten, että A ei ole rajoitettu, mutta $m_1^*(A) < \infty$.

3. Onko totta (perustele), että

(a) jos $m_n^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon?

(b) jos $m_n^*(A) = 0$, niin $m_n^*(\overline{A}) = 0$?

4. Olkoot $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n$, $A_1 \subset A_2$, ja $m_n(A_1) < \infty$. Osoita, että

$$m_n(A_2 \setminus A_1) = m_n(A_2) - m_n(A_1).$$

5. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$m_n^*(E) = \inf\{m_n^*(V) : V \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin, } E \subset V\}.$$

6. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $m_n^*(B) = 0$. Osoita, että A on mitallinen jos ja vain jos $A \cup B$ on mitallinen.

7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $m_n^*(\partial A) = 0$ niin A on mitallinen.

8. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Osoita, että

$$V = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell, \quad Q_\ell \cap Q_m = \emptyset \quad \text{jos } \ell \neq m,$$

missä $Q_\ell = x_\ell + [0, 2^{-k_\ell})^n$ joillekin $x_\ell \in \mathbb{R}^n$ ja $k_\ell \in \mathbb{N}$.

9. Olkoon $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ funktio siten, että $\mu(\emptyset) = 0$, ja

(i) jos $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \ldots$ ovat pareittain pistevieraita, niin $\mu(\cup_j [a_j, b_j)) = \sum_j \mu([a_j, b_j))$,

(ii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Osoita, että jos $\mu([0, 1)) = 1$, niin $\mu(V) = m_1^*(V)$ kaikilla avoimilla $V \subset \mathbb{R}$.

10. Olkoon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ kasvava funktio. Osoita, että f on epäjatkuva korkeintaan numeroituvan monessa pisteessä (vihje: Harjoitusten 1 tehtävä 6).