Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 1, 30.5. 2014

1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$ äärellinen joukko. Osoita suoraan ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_1^*(A) = 0$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ numeroituva joukko. Osoita suoraan ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_1^*(A) = 0$.

3. Olkoon $A = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että $m_2^*(A) = 0$.

4. Osoita tarkasti, että $m_1^*([0,1]) = 1$.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Asetetaan $x + A = \{x + y : y \in A\}$. Osoita, että $m_n^*(x + A) = m_n^*(A)$.

6. Olkoon $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$, ja $a_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$. Osoita, että

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{J \subset I \text{ äärellinen}} \sum_{i \in J} a_i = \infty.$$

7. Joukon $A \subset \mathbb{R}$ *Jordanin ulkomitta* on

$$\mathcal{J}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} v(I_i) : I_i \text{ avoin väli, } A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i \right\},$$

missä $v(I)$ on välin I pituus. Osoita, että $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(\overline{A})$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}$.

8. Olkoon

$$A = \{x = 0, a_1 a_2 a_3 ... \in [0,1] : a_j \neq 4 \text{ kaikilla } j\},$$

missä $0, a_1 a_2 a_3 ...$ on desimaaliesitys. Laske $m_1^*(A)$.

9. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $m_2^*(G_f) = 0$, kun

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

10. Modifioidaan Cantorin 1/3-joukon konstruktiota muuttamalla pois otettavien välien pituuksia; 1. vaiheessa poistetaan välin $[0,1]$ keskeltä avoin väli jonka pituus on ℓ_1, seuraavaksi poistetaan jäljelle jäävien välien keskeltä ℓ_2:n pituiset välit, ja k:nnessa vaiheessa poistetaan 2^{k-1} kappaletta ℓ_k:n pituisia välejä. Lopulta saadaan Cantor-tyyppinen joukko $\hat{C}$ (jos $\ell_k = 3^{-k}$, saadaan Cantorin 1/3-joukko). Voidaanko luvut ℓ_k valita siten, että $m_1^*(\hat{C}) > 0$?