

Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 9, 15.11. 2013

1. Olkoon $1 \leq p \leq q < \infty$ ja $0 < m_n(A) < \infty$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^p dm_n \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^q dm_n \right)^{1/q}$$

kaikilla $f \in L^q(A)$.

2. Olkoon $f(x) = |x|^\alpha$ ja $1 \leq p < \infty$. Osoita, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1))$ jos ja vain jos $\alpha < -n/p$.

3. Todista Youngin epäyhtälö: jos $a, b \geq 0$ ja $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, niin

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ohje: Integroi funktiota $\varphi(t) = t^{p-1}$ välin $[0, a]$ yli. Integroi sitten käänteisfunktioita φ^{-1} välin $[0, b]$ yli. Nyt ensimmäinen integraali antaa funktion φ graafin alapuolelle jäävän joukon pinta-alan, ja toinen integraali graafin vasemmalle puolelle jäävän joukon pinta-alan. Laske alat yhteen ja vertaa suorakulmion $[0, a] \times [0, b]$ pinta-alaan. Milloin pätee yhtäsuuruus?

4. Jos $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$, niin summafunktio $f + g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ei ole hyvin määritelty jos esim. $f(x) - g(x) = \infty - \infty$ jollain x . Osoita, että $[f + g] = [f] + [g] \in L^p(A)$ voidaan kuitenkin aina määrittellä.

5. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Osoita, että

$$L^p(A) \cap L^\infty(A) \subset L^q(A).$$

6. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Konstruoi jono (f_j) avaruudessa $L^p([0, 1])$ siten, että $\|f_j\|_p \rightarrow 0$, mutta jono $(f_j(x))_j$ ei suppene millään $x \in [0, 1]$ kun $j \rightarrow \infty$.

7. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, $m_n(A) = \infty$, ja $1 \leq p, q \leq \infty$, $p \neq q$. Osoita, että on olemassa $f \in L^p(A) \setminus L^q(A)$.