

Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 8, 8.11. 2013
Kurssin ensimmäisen osan viimeinen harjoitus

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^3$ ja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Laske $\int_A f \, dm_2$.

2. Olkoot $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuvia funktioita. Osoita, että fg on absoluuttisesti jatkuva.

3. Olkoon $f : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{-2}, & y < x < 1, \\ -y^{-2}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että

$$\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} f(x, y) \, dy dx = 1 \quad \text{ja} \quad \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} f(x, y) \, dx dy = -1$$

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva siten, että f' on rajoitettu. Osoita, että $f|_{[0,1]}$ on absoluuttisesti jatkuva. Päteekö väite jos f on derivoituva vain melkein kaikkialla?
5. Onko funktio $f(x) = \sqrt{x}$ absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, 1]$?
6. Konstruoi jatkuva funktio $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $A \in \mathcal{M}_1$ siten, että $f^{-1}(A)$ ei ole mitallinen. (Ohje: Voit käyttää hyväksesi seuraavaa tietoa: jokainen positiivimittainen joukko $B \subset [0, 1]$ sisältää ei-mitallisen joukon. Olkoon h Cantorin funktio. Tarkastele funktion $x \mapsto h(x) + x$ käänteisfunktioita).
7. Olkoon $p \geq 1$, ja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^p \, dx \right)^{1/p} \leq \int_0^\infty m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq t\})^{1/p} \, dt.$$