**Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 7, 1.11. 2013**

**HUOM: 25.10. EI HARJOITUKSIA**

**1.** Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Osoita, että $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$.

**2.** Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{t\to 0} \int_{[1,\infty[} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx.$$

**3.** Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, $m_n(A) < \infty$, ja $(f_j)$ jono integroituvia funktioita $f_j : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Oletetaan, että $f_j \to f$ tasaisesti joukossa $A$. Osoita, että $f$ on integroituva ja

$$\int_A f\, dm_n = \lim_{j\to\infty} \int_A f_j\, dm_n.$$

**4.** Konstruoi Riemann-integroituva funktio $f : [0, 1] \to [0, 1]$ joka on epäjatkuva ylinumeroituvassa joukossa.

**5.** Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva, ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

on jatkuva.

**6.** Olkoot $f_j : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallisia. Osoita, että jos funktio $f = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ on integroituva, niin

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j\, dm_n = 0.$$

**7.** Anna esimerkki mitallisesta funktiosta $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ siten, että $f$ ei ole Lebesgue-integroituva, mutta epäoleellinen Riemannin integraali

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1} f(t)\, dt = I \in \mathbb{R}$$

on olemassa.