Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 6, 18.10. 2013

1. Anna esimerkki laskevasta jonosta (f_k), $f_k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, mitallisia funktioita siten, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx.$$

2. Anna esimerkki jonosta (f_k), $f_k : [0, 1] \to [0, 1]$, mitallisia funktioita siten, että Fatoun lemmassa on aito epäyhtälö;

$$\int_{[0,1]} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx < \liminf_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(x)\,dx.$$

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-|x|/k}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

4. Olkoot $f_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, \ldots$ mitallisia funktioita ja $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integroituva s.e. $f_j \leq g$ kaikilla j. Osoita (Fatoun lemman avulla), että

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j\,dm_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{j\to\infty} f_j\,dm_n.$$

5. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[1,2]} \log\Big(1 + \frac{1}{x^j}\Big)x\,dx.$$

6. Määrää ne luvut $a \in \mathbb{R}$ joille raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \Big(1 - \frac{x}{k}\Big)^k e^{ax}\,dx$$

on olemassa ja äärellinen.

7. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$