

Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 5, 11.10. 2013

1. Anna esimerkki funktiosta $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ siten, että $f(x) < \infty$ kaikilla $x \in [0, 1]$, mutta $\int_{[0,1]} f dm_1 = \infty$.
2. Olkoon (x_k) , $k = 1, 2, \dots$ jono avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$. Osoita tarkasti, että $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ on olemassa jos ja vain jos $\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k$.
3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen funktio, ja $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Osoita, että

$$\int_A f dx \leq \int_B f dx.$$

4. Määritellään funktiot $f_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ seuraavasti: $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_3 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_4 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_5 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_6 = \chi_{[3/4,1]}$, $f_7 = \chi_{[0,1/8]}$... Määritä funktiot $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ ja $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$.
5. Olkoot $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia, ja $u \in \mathcal{Y}^+$. Osoita, että

$$I\left(u, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(u, E_j).$$

6. Olkoot $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $j = 1, 2, \dots$ mitallisia funktioita. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{\infty} f_j dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j dx$$

7. Anna jono (f_k) , missä kukin $f_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on mitallinen, siten että

$$\int_{[0,1]} f_k dm_1 \rightarrow 0$$

kun $k \rightarrow \infty$, mutta $f_k(x)$ ei suppene millään $x \in [0, 1]$.