Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 4, 4.10. 2013

1.

(a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että A on mitallinen jos ja vain jos karakteristinen funktio χ_A on mitallinen.

(b) Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka ei ole mitallinen.

2. Näytä, että funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f = 10\chi_{[-2,5]} + 5\chi_{]2,3[} + \chi_{\mathbb{Q}}$ on yksinkertainen. Anna funktion f normaaliesitys ja laske integraali $I(f, \mathbb{R})$.

3. Osoita, että yksinkertaiset funktiot ovat mitallisia.

4. Olkoon f mitallinen funktio. Osoita, että positiiviosa f^+ on myös mitallinen.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ yksinkertainen funktio ja joukot $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ pareittain pistevieraita ja Lebesgue-mitallisia. Osoita, että

$$I\Big(f, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} I(f, E_j).$$

6. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $g \circ f$ on mitallinen.

7. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen ja olkoon $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio, jolle

$$m_n^*(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että g on mitallinen.

8. Muutetaan Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon konstruktiota seuraavasti: 1. vaiheessa poistetaan suljetun yksikkövälin keskeltä avoin väli jonka pituus on a_1. 2. vaiheessa poistetaan kummankin jäljelle jääneen välin keskeltä avoin väli jonka pituus on a_2. k:nnessa vaiheessa poistetaan kunkin jäljelle jääneen 2^{k-1}:n välin keskeltä avoin väli jonka pituus on a_k. Jäljelle jäävien välien ääretön leikkausjoukko on Cantor -tyyppinen joukko $\mathcal{C}$ (Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle $a_k = 3^{-k}$). Osoita, että jono (a_k) voidaan valita siten, että $m_1(\mathcal{C}) > 0$.