Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 3, 27.9. 2013

1. Konstruoi avoin rajoittamaton joukko $A \subset \mathbb{R}$ jolle $m_1(A) < \infty$.

2. Olkoot $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n$, $A_1 \subset A_2$, ja $m_n(A_1) < \infty$. Osoita, että

$$m_n(A_2 \setminus A_1) = m_n(A_2) - m_n(A_1).$$

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Osoita, että reunajoukko ∂A on Lebesgue-mitallinen.

4. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $m_n^*(B) = 0$. Osoita, että A on mitallinen jos ja vain jos $A \cup B$ on mitallinen.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $m_n^*(\partial A) = 0$ niin A on Lebesgue-mitallinen.

6. Keksi esimerkki mitallisista joukoista $\mathbb{R}^n \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, joille

$$m_n\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) < \lim_{j \to \infty} m_n(A_j).$$

7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu. Onko $m_n(\partial A) = 0$?

8. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko. Osoita, että

$$V = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell, \quad Q_\ell \cap Q_m = \emptyset \quad \text{jos } \ell \neq m,$$

missä $Q_\ell = x_\ell + [0, 2^{-k_\ell}[^n$ joillekin $x_\ell \in \mathbb{R}^n$ ja $k_\ell \in \mathbb{N}$.