Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 2, 20.9. 2013

1. Osoita, että $m_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

2. Osoita, että n-välin reunan Lebesguen ulkomitta on nolla.

3. Onko totta (perustele), että

(a) jos $m_n^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon?

(b) jos $m_n^*(A) < \infty$, niin A on rajoitettu?

(c) jos $m_n^*(A) = 0$, niin $m_n^*(\overline{A}) = 0$?

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Asetetaan $x + A = \{x + y : y \in A\}$. Osoita, että $m_n^*(x + A) = m_n^*(A)$.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Asetetaan $tA = \{tx : x \in A\}$. Osoita, että $m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A)$.

6. Olkoon $V \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Osoita, että V voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

missä I_j:t ovat avoimia, pareittain pistevieraita välejä.

7. Olkoon $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ funktio siten, että $\mu(\emptyset) = 0$, ja

(i) jos $I_1, I_2, \ldots$ ovat välejä joiden sisukset ovat pareittain pistevieraita, niin $\mu(\cup_j I_j) = \sum_j \mu(I_j)$,

(ii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Osoita, että jos $\mu([0, 1]) = 1$, niin $\mu(V) = m_1^*(V)$ kaikilla avoimilla $V \subset \mathbb{R}$ (vihje: osoita ensin, että $\mu([0, 2^{-k}]) = 2^{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$).