**Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 12, 13.12. 2013**

**1.** Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus, missä $\Gamma$ koostuu äärellisen monesta joukosta. Osoita, että jos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on $\Gamma$-mitallinen, niin $f$ saa vain äärellisen monta arvoa.

**2.** Olkoot $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus, $\Gamma_0 \subset \Gamma$ $\sigma$-algebra, ja $f : X \to [0, \infty]$ $\Gamma$-mitallinen. Osoita, että

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \Gamma_0,$$

määrittelee mitan $\nu$ $\sigma$-algebraan $\Gamma_0$.

**3.** (jatkoa) Osoita, että

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu$$

kaikille $\Gamma_0$-mitallisille funktioille $g : X \to [0, \infty]$.

**4.** Olkoon $n \geq 2$. Määritä polaarikoordinaattien avulla vakio $C_n > 0$ siten, että

$$m_n(B^n(0,1)) = C_n \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1}(0,1)).$$

**5.** Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(2 + \frac{n^2}{k}\Big)^{-n}.$$

**6.** Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{1}{n+k} - 3\Big)^{-n}.$$

**7.** Olkoon $C \subset [0,1]$ Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Osoita, että $\mathcal{H}^s(C) > 0$ kun $s = \log 2 / \log 3$ (ohje: olkoon $(A_k)$ avointen välien muodostama joukon $C$ peite. Koska $C$ on kompakti, voidaan olettaa että $(A_k)$ on äärellinen. Valitse $j$ siten, että jokaisen $A_k$ pituus on selvästi suurempi kuin $3^{-j}$, ja laske montako konstruktion $j$:nnen vaiheen väliä sisältyy kuhunkin joukkoon $A_k$).