Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 11, 29.11. 2013

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $t, s > 0$. Osoita, että

$$\mathcal{H}^s(tA) = t^s \mathcal{H}^s(A).$$

Tässä $tA = \{tx : x \in A\}$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $s, \delta > 0$. Osoita, että $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ jos ja vain jos $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

3. Tarkastellaan Hausdorffin $\frac{1}{2}$-sisältöä $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ joukossa $\mathbb{R}$.

(i) Osoita, että $\mathcal{H}^{1/2}_\infty = v(I)^{1/2}$ kaikilla rajoitetuilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.

(ii) Osoita, että väli $[0, 1]$ ei ole $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$-mitallinen.

(Vihje: $\sum a_j^{1/2} \geq (\sum a_j)^{1/2}$ kun $a_j \geq 0$.)

4. Olkoot $C > 0$ ja $\alpha > 1$. Olkoon μ^* ulkomitta välillä $[0, 1]$ siten, että

$$\mu^*([a, b]) \leq C(b - a)^\alpha$$

kaikilla $a < b$. Osoita, että $\mu^*([0, 1]) = 0$.

5. Anna esimerkki ulkomitasta μ^* ja joukoista A_k siten, että $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ ja $\mu^*(A_1) < \infty$, mutta

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) > \mu^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

6. Olkoon μ^* äärellinen Borel-mitta välillä $(0, 1]$. Osoita, että funktio

$$f : (0, 1] \to [0, 1],\ f(t) = \mu^*((0, t]),$$

on jatkuva jos ja vain jos $\mu^*(\{x\}) = 0$ jokaisella $x \in (0, 1]$.

7. Anna esimerkki Borel-mitasta μ^* välillä $[0, 1]$ ja suljetusta joukosta $E \subset [0, 1]$, $m_1(E) = 0$, siten, että $\mu^*(E) = 1$ ja $\mu^*(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$ (vihje: Cantorin funktio).