Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 10, 22.11. 2013

1. Olkoon X joukko, ja μ^* lukumäärämitta joukossa X. Osoita, että jokainen $A \subset X$ on μ^*-mitallinen.

2. Olkoon X ylinumeroituva joukko ja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$,

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{kun } A \subset X \text{ on numeroituva} \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että μ^* on ulkomitta.

3. Olkoot X ja μ^* kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että joukko $A \subset X$ on μ^*-mitallinen jos ja vain jos A on numeroituva tai $X \setminus A$ on numeroituva.

4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että

$$||fg||_1 \leq ||f||_1 ||g||_\infty.$$

5. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja $Y \subset X$. Määritellään rajoittuma

$$\mu^*|_Y(A) = \mu^*(Y \cap A).$$

Osoita, että $\mu^*|_Y$ on ulkomitta X:ssä.

6. Olkoon $1 \leq p < r < q < \infty$. Osoita, että

$$L^r(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n),$$

eli että jokaiselle $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on olemassa $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ siten, että $f = g + h$.

7. Olkoon $1 \leq p < \infty$, ja olkoon (f_j), $f_j : [0,1] \to [0,1]$, jono avaruudessa $L^p([0,1])$ siten, että melkein kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $f_j(x) \to 0$ kun $j \to \infty$. Osoita, että $f_j \to 0$ avaruudessa $L^p([0,1])$.

8. Onko edellisen tehtävän väite totta jos $p = \infty$?