Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 1, 13.9. 2013

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ numeroituva joukko. Osoita suoraan ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_1^*(A) = 0$.

2. Olkoon $A = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $m_n^*(A) = 0$.

3. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $m_2^*(G_f) = 0$, kun

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

4. Joukon $A \subset \mathbb{R}$ *Jordanin ulkomitta* on

$$\mathcal{J}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} v(I_i) : I_i \text{ avoin väli, } A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i \right\},$$

missä $v(I)$ on välin I pituus.

Osoita, että $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(\overline{A})$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}$. Päättele tästä, että

$$\mathcal{J}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1.$$

5. Olkoon $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$, ja $a_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$. Osoita, että

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{J \subset I \text{ äärellinen}} \sum_{i \in J} a_i = \infty.$$

6. Olkoon $f : [0,1] \to [0,1]$ kasvava funktio. Osoita, että f on epäjatkuva korkeintaan numeroituvan monessa pisteessä (voit käyttää edellistä tehtävää).

7. Olkoon

$$A = \{x = 0, a_1 a_2 a_3 ... \in [0,1] : a_j \neq 4 \text{ kaikilla } j\},$$

missä $0, a_1 a_2 a_3 ...$ on desimaaliesitys. Laske $m_1^*(A)$.